LEVYRESONAATTORIN MATEMAATTINEN LAATTAMALLINNUS

Matti A. Ranta[1], **Petri Ranta** [2], **Laila Hosia** [3]

[1] Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
PL 11100, 00076 Aalto University
matti.ranta@aalto.fi

[2] Waveray
Friitalantie 13B
28400 Ulvila
petri.ranta@waveray.fi

[3] Nallenpolku 2 C 38
02110 Espoo
laila.hosia@gmail.com

Tiivistelmä

Levyresonaattoria käytetään vaimentamaan erityisesti bassoäänten resonanssia huonetilassa. Resonaattorin toimintaa voidaan teoreettisesti tarkastella soveltamalla yleisesti tunnettua laatan kimmopinnan biharmoonista osittaisdifferentiaaliyhtälöä resonaattorin kansilaatan värähtelyyn.

Mallinnuksessa oletetaan resonaattorin olevan ilmatäytteinen laatikkomainen kotelo, paineen vaikuttavan kohtisuorasti kanteen eikä painesiirtymiä kannen suunnassa oteta huomioon. Kannen reunat oletetaan joko jäykiksi tai nivelkiinnitetyiksi. Taipuman osittaisdifferentiaaliyhtälö voidaan ratkaista muuttujat erottamalla. Ratkaisusta nähdään, mikä osuus on kotelon kansirakenteen värähtelyllä ja mikä osuus on kotelon sisällä olevan ilman värähtelyllä resonaattorin ominaisvärähtelyyn.

Kotelon sisällä oleva eristemateriaali ja kannen suuntaiset voimat vaikuttavat käytännössä resonaattorin toimintaan. Mikäli kansi on jännitetty kalvo, laattateoriaa ei voi soveltaa, koska ominaisvärähtely riippuu kalvon vetojännityksistä

1 JOHDANTO

Levyresonaattoria käytetään vaimentamaan erityisesti bassoäänten resonanssia huonetilassa. Levyresonaattori on yleensä suorakulmainen laatikkomainen kotelo, jonka sisällä on suljetussa tilassa ilmaa ja mahdollisesti myös jotain eristemateriaalia.

Kun ääniaalto kohtaa resonaattorin kannen, rupeaa kansi värähtelemään, mikä saa myös kotelon sisällä olevan ilman värähtelemään. Kannen ja ilman värähtely yhdessä määräävät levyresonaattorin ominaisvärähtelyn.

Olettamalla, että äänenpaine kohdistuu kotelon kanteen kohtisuoraan eikä ilmanpaineen kannensuuntaisia siirtymiä laatikon sisällä tarvitse ottaa huomioon, ilmatäytteiseen levyresonaattoriin voidaan soveltaa yleistä laattateoriaa [1].

2 LAATTAYHTÄLÖ

Levyresonaattorin ominaisvärähtelyn teoreettisen tarkastelun lähtöyhtälöksi voidaan ottaa laatan kimmopinnan differentiaaliyhtälö ([1] kaava (917)).

Valitaan koordinaattiakseleiksi kotelon kannen kohtisuorat symmetria-akselit. Kannen mitat ovat $2a \cdot 2b$, kotelon syvyys d sekä kannen materiaalin tiheys ρ_A ja paksuus *h*. Kansilaatan kimmokerroin on *E*. Laatan jäykkyysluku *D* saadaan kaavasta ([1] kaava (914)).

$$D = Eh^3 \Big/ \left[12\left(1-\nu^2\right)\right] \qquad (1)$$

ν on suppeumakerroin eli Poissonin vakio.

Kotelon kantta kohottava kokoon puristuneen ilman paine on $\left[\rho c^2 / d\right] w$ ([2]), jossa *w* on laatan taipuma, *c* on äänen nopeus ilmassa ja ρ on ilman tiheys. Kotelon kannen taivutusvärähtelyistä ([1] § 245) aiheutuu hitausvoima $\rho_A h \partial^2 w / \partial t^2$. Materiaalin taivutuksesta aiheutuva vaimennus $\rho_A h 2\zeta\omega \partial w / \partial t$ referoidaan resonanssikotelon alimpaan ominaiskulmanopeuteen ω , ζ on vaimennusvakio. Sijoittamalla termit yleiseen yhtälöön ([1] kaava (917)) saadaan levyresonaattorin ominaisvärähtely-yhtälö.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\zeta\omega \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\rho c^2}{\rho_A h d} w + \frac{D}{\rho_A h}\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right] = 0 \qquad (2)$$

3 RESONAATTORIN OMINAISVÄRÄHTELY JA MUUTTUJIEN EROTTAMINEN

Ominaisvärähtely-yhtälö ratkaistaan erottamalla muuttujat ([3] kappale C)

$$w(t,x,y) = T(t)X(x)Y(y) \qquad (3)$$

Sijoittamalla kaavaan (2) ja järjestelemällä termejä saadaan

$$\frac{\ddot{T}}{T} + 2\zeta\omega\frac{\dot{T}}{T} + \frac{\rho c^2}{\rho_A h d} + \frac{D}{\rho_A h}\left[\frac{X''''}{X} + 2\frac{X''}{X}\frac{Y''}{Y} + \frac{Y''''}{Y}\right] = 0 \quad (4)$$

Lähteen [4] perusteella päädytään, että symmetriasyistä ratkaisu esim. *X*:lle on

$$X(x) = A\cosh(\beta x/a) + B\cos(\beta x/a) \quad (5)$$

Tässä β on ns. separoimisparametri, jonka arvo määrittyy reunaehdoista.

4 REUNAEHDOT

Tapaus 1 on "Jäykästi kiinnitetty laatan reuna". ([1] § 231 k. (924))

Taipuman reunalla tulee hävitä $X(\pm a) = 0 \quad \Rightarrow A/B = -\cos\beta/\cosh\beta$

Kaltevuuden tulee reunoilla hävitä $X'(\pm a) = 0 \Rightarrow A/B = \sin\beta/\sinh\beta$

Ehdot toteutuvat jos parametri β on yhtälön $\tan\beta + \tanh\beta = 0$ juuri,

juuret ovat $\beta_1 = 2{,}365$ ja $\beta_n \cong (2n+1)\pi/4$ kun $n = 3, 5, 7, ...$ (6)

Lisäksi jos ehto $X(0) = 1$ toteutuu, ratkaisu on

$$X(x) = \left[\sin\beta\cosh(\beta x/a) + \sinh\beta\cos(\beta x/a)\right] / (\sin\beta + \sinh\beta) \quad (7)$$

Tapaus 2 on "Niveltyvästi kiinnitetty laatan reuna". ([1] § 231 k. (925a))

Taipuman reunalla tulee hävitä $X(\pm a) = 0 \quad \Rightarrow A/B = -\cos\beta/\cosh\beta$

Momentin tulee reunoilla hävitä eli $X''(\pm a) = 0 \Rightarrow A/B = +\cos\beta/\cosh\beta$.

Koska vain nolla on vastalukunsa suuruinen, on parametri β yhtälön $\cos\beta = 0$ juuri,

juuret ovat $\beta_1 = \pi/2 \cong 1{,}571$ ja $\beta_n = (n - 1/2)\pi \quad n = 1, 2, 3, ...$ (8)

Lisäksi jos ehto $X(0) = 1$ toteutuu, ratkaisu on

$$X(x) = \cos(\beta x/a) \quad (9)$$

5 ERI TEKIJÖIDEN VAIKUTUS OMINAISKULMANOPEUTEEN

Sijoitetaan kaavaan (4) yleiset koefunktiot $T(t) = e^{r\omega t}$, $X(x) = e^{\beta x/a}$ ja $Y(y) = e^{\beta y/b}$.

Tällöin saadaan ns. separoimislauseke, jossa termien merkitys selviää

$$\underbrace{(r\omega)^2+2\zeta\omega r\omega}_{vaimennusosuus}+\underbrace{\underbrace{\frac{\rho c^2}{\rho_A hd}}_{\omega_i^2}+\underbrace{\frac{D}{\rho_A h}\left[\left(\frac{\beta_1}{a}\right)^2+\left(\frac{\beta_1}{b}\right)^2\right]^2}_{\omega_k^2}}_{\omega^2}\equiv\underbrace{\omega^2}_{>0}\underbrace{\left(r^2+2\zeta r+1\right)}_{=0}=0 \qquad (10)$$

Vaimennuksen ζ vaikutus värähtelyihin saadaan yhtälön (10) ratkaisusta $r=-\zeta\pm i\sqrt{1-\zeta^2}$, jolloin $T(t)=e^{-\zeta\omega t}\sin\left(t\omega\sqrt{1-\zeta^2}\right)$ eli värähtelyjen kulmanopeus laskee ja amplitudi pienenee.

Resonaattorissa voi esiintyä yliharmonisia värähtelyjä ja eri värähtelymuotojen resonointia, mitä yhtälö (10) ei huomioi.

6 LASKETUT ESIMERKKITAPAUKSET

Laattamallinnuslausekkeesta (10) lasketaan ensimmäisen moodin vaimentumattoman värähtelyn ominaisarvo muutamalle erilaiselle levyresonaattorille.

Laskelmissa käytetyt vakioarvot:

ilman tiheys: $\rho=1{,}196\,\mathrm{kgm^{-3}}$ äänennopeus: $c=345{,}0\,\mathrm{ms^{-1}}$ Poissonin vakio $\nu=0{,}3$

ensimmäiset moodit: jäykkä reuna $\beta_1=2{,}365$ nivelreuna $\beta_1=1{,}571$

Esimerkki I Kansi on kumimatto, $h=0{,}005\,\mathrm{m}$

kotelo $2a=3{,}00\,\mathrm{m}$ $2b=0{,}70\,\mathrm{m}$ $d=0{,}15\,\mathrm{m}$

kansimateriaali $\rho_A=1{,}2\cdot10^3\,\mathrm{kgm^{-3}}$ $E=5{,}0\cdot10^6\,\mathrm{Pa}$ $D=57\cdot10^{-3}\,\mathrm{Nm}$

	$\omega_i^2\left[\mathrm{s^{-2}}\right]$	$\omega_k^2\left[\mathrm{s^{-2}}\right]$	$\omega^2\left[\mathrm{s^{-2}}\right]$	$f=\omega/(2\pi)$
jäykkä	158000	22	158000	63 Hz
nivel	158000	4	158000	63 Hz

Esimerkki II Kansi on puolikova lastulevy,

kotelo $2a=2{,}80\,\mathrm{m}$ $2b=0{,}80\,\mathrm{m}, 1{,}4\mathrm{m}$ $d=0{,}05\mathrm{m}, 0{,}10\mathrm{m}, 0{,}15\mathrm{m}$

kansimateriaali $\rho_A=0{,}7\cdot10^3\,\mathrm{kgm^{-3}}$ $E=4{,}0\cdot10^9\,\mathrm{Pa}$ $D=633\mathrm{Nm}$

	$2b = 0{,}8\,\mathrm{m}$				$2b = 1{,}4\,\mathrm{m}$		
$d = 0{,}05\mathrm{m}$	$\omega_i^2\left[\mathrm{s}^{-2}\right]$	$\omega_k^2\left[\mathrm{s}^{-2}\right]$	$\omega^2\left[\mathrm{s}^{-2}\right]$	$f = \omega/(2\pi)$	$\omega_k^2\left[\mathrm{s}^{-2}\right]$	$\omega^2\left[\mathrm{s}^{-2}\right]$	$f = \omega/(2\pi)$
jäykkä	340000	108000	448000	107 Hz	15000	355000	95 Hz
nivel	340000	21000	361000	96 Hz	3000	343000	93 Hz
$d = 0{,}10\mathrm{m}$							
jäykkä	170000	108000	278000	84 Hz	15000	185000	68 Hz
nivel	170000	21000	191000	70 Hz	3000	173000	66 Hz
$d = 0{,}15\mathrm{m}$							
jäykkä	113000	108000	221000	75 Hz	15000	128000	57 Hz
nivel	113000	21000	134000	58 Hz	3000	116000	54 Hz

7 JOHTOPÄÄTÖKSET

Todelliset kiinnitykset ovat jossain ääritapausten jäykkäkiinnitys ja nivelkiinnitys välillä. Kiinnityksen jäykkyys nostaa ominaisvärähtelytasoa tuntuvasti, kun kansilevy on jäykkä. Ilmavälin pienentäminen nostaa värähtelytasoa. Kiinnitysvälin kasvattaminen vähentää kannen kiinnityksen vaikutusta.

Käytännössä levyresonaattorin toimintaan vaikuttaa muitakin tekijöitä kuin mitä teoreettisessa laattamallinnuksessa on otettu huomioon.

VIITTEET

[1] Arvo Ylinen, Kimmo- ja lujuusoppi, osa II, Neljäs luku WSOY Porvoo 1970.

[2] M. Feuerbacher, The resonance frequency of a membrane absorber. April 2005. http://dogbreath.de/misc/PlaneAbsorberResonance.pdf

[3] Väisälä, TKK, Moniste n:o 141, Matematiikka IV, Jälkimmäinen osa, Helsinki 1956.

[4] EqWorld Biharmonic Equation http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/lpde/lpde503.pdf