## TASOMAISET ÄÄNILÄHTEET VIRTAAVASSA VÄLIAINEESSA

**Seppo Uosukainen**

VTT Rakennus- ja yhdyskuntatekniikka, Talotekniikka
PL 1804, 02044 VTT
Seppo.Uosukainen@vtt.fi

## 1 JOHDANTO

Goldstein [1] on esittänyt lausekkeet aeroakustisille kenttäsuureille ja energiasuureille (intensiteetti, energiatiheys) väliaineelle, jossa on staattinen virtaus. Munjal [2] on esittänyt vastaavat lausekkeet aeroakustisille kenttäsuureille ja akustiselle intensiteetille yksidimensioisille kentille aaltoputkissa. Molempien lähtökohtana on linearisoidut kenttäyhtälöt. Koska akustiset energiasuureet ovat toista kertalukua, ei voi olla varma tällä tavoin saatujen tulosten oikeellisuudesta. Temkin [3] on tehnyt energiatarkastelun, jossa otetaan huomioon termit toiseen kertalukuun asti, mutta ko. tarkastelu on tehty virtauksettomalle väliaineelle. Tässä esityksessä suoritetaan energiatarkastelu virtaukselliselle väliaineelle samalla periaatteella kuin Temkinin tarkastelu ja tarkastelun tulosten perusteella määritellään akustiset energiasuureet. Tarkastelu pohjautuu epälineaarisista kenttäyhtälöistä toiseen kertalukuun asti määritettyihin aeroakustisiin kenttäsuureisiin. Saatavat akustiset energiasuureet vastaavat Goldsteinin ja Munjalin määritelmiä.

Uosukainen [4] on aiemmin esittänyt tasomaisten lähdetyyppien lähdevoimakkuuksien määritelmät virtauksettomassa väliaineessa. Kyseinen työ laajennetaan tässä sovellettavaksi akustisiin kenttiin virtauksellisessa väliaineessa. Lähdevoimakkuudet määritellään aeroakustisten kenttäsuureiden avulla.

JMC-menetelmä on yleiseen systeemiteoriaan pohjautuva aktiiviseen äänenhallinan lähestymistapa [5]. Tässä esityksessä määritellään JMC-menetelmän mukaiset tasomaiset sekundäärilähteet virtaavassa väliaineessa aktiivisen meluntorjunnan tarpeisiin.

## 2 PERUSYHTÄLÖT

Massan säilyvyyslaki (jatkuvuusyhtälö) fluidille on [1, 3, 6]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{U})=\rho q \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{U}=\rho q\,, \tag{1}$$

missä $\rho$ on tiheys, $t$ on aika, $\boldsymbol{U}$ on hiukkasnopeus ja $q$ on massalähdejakauman voimakkuus (monopolijakauma, tilavuusnopeus tilavuusyksikköä kohti) ja missä skalaarifunktion $y$ Lagrangen liikekuvauksen aikaderivaatalla $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ ja Eulerin liikekuvauksen aikaderivaatalla $\partial y/\partial t$ on yhteys $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = \partial y/\partial t + \boldsymbol{U}\cdot\nabla y$. Liikemäärän säilymislaki (liikeyhtälö, Eulerin yhtälö) on [3]

$$\frac{\partial(\rho\boldsymbol{U})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{U}\boldsymbol{U})-\nabla\cdot\mathrm{s}=\rho q\boldsymbol{U}+\boldsymbol{F}\,, \tag{2}$$

missä s on jännitysdyadi ja $\boldsymbol{F}$ on voimalähdejakauman voimakkuus (dipolijakauma, voima yksikkötilavuutta kohti). Kun lauseke (1) kerrotaan suureella $\boldsymbol{U}$ ja vähennetään lausekkeesta (2), jälkimmäiselle lausekkeelle saadaan vaihtoehtoinen muoto

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\boldsymbol{U}\cdot\nabla\boldsymbol{U}\right)-\nabla\cdot \mathrm{s}=\boldsymbol{F}\Leftrightarrow \rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t}-\nabla\cdot \mathrm{s}=\boldsymbol{F}\,, \tag{3}$$

missä Lagrangen ja Eulerin liikekuvauksien mukaisilla aikaderivaatoilla vektorisuureelle $\boldsymbol{y}$ on yhteys $\mathrm{d}\boldsymbol{y}/\mathrm{d}t = \partial\boldsymbol{y}/\partial t + \boldsymbol{U}\cdot\nabla\boldsymbol{y}$. Oletetaan fluidi ideaalifluidiksi, jolloin jännitysdyadi on s $= -P\mathbf{I}$, missä $P$ on paine ja $\mathbf{I}$ on identtinen dyadi. Oletetaan lisäksi, että tiheys ja paine voidaan jakaa staattisiin komponentteihin ($\rho_0$, $P_0$) ja perturbaatiokomponentteihin ($\rho'$, $p$) siten, että $p << P_0$, $\rho' << \rho_0$, ja että hiukkasnopeus voidaan jakaa staattiseen virtausnopeuteen $\boldsymbol{U}_0$ ja perturbaatiohiukkasnopeuteen $\boldsymbol{u}$. Perturbaatiokenttäkomponentit liittyvät akustisiin kenttiin. Oletetaan lisäksi, että massalähteet liittyvät akustisiin perturbaatiokenttiin ja että voimalähde sisältää perturbaatiokomponentin $\boldsymbol{f}$ ja staattisen gravitaatiovoiman $\rho\boldsymbol{g}$, missä $\boldsymbol{g}$ on vektorimuotoinen maan vetovoiman kiihtyvyys. Oletetaan, että perturbaatiovoima on pyörteetön, jolloin sen roottori häviää.

Staattiset komponentit yhtälöissä (1) ja (3) noudattavat perturbaatiokenttien puuttuessa yhtälöitä

$$\boldsymbol{U}_0\cdot\nabla\rho_0+\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{U}_0=0\,,\ \rho_0\boldsymbol{U}_0\cdot\nabla\boldsymbol{U}_0+\nabla P_0=\rho_0\boldsymbol{g}\,. \tag{4}$$

Koska perturbaatiokentät ovat pieniä, ne eivät vaikuta staattisiin komponentteihin. Näin ollen perturbaatiokenttien läsnä ollessa staattiset kentät noudattavat yhä yhtälöitä (4) ja ne voidaan vähentää pois yhtälöistä (1) ja (3). Myös näin syntyvä perturbaatiotiheyden ja gravitaatiotermin tulo yhtälössä (3) voidaan vähentää yhtälöparin (4) jälkimmäisen lausekkeen nojalla. Tällöin yhtälöparin (1) ja (3) tilalle saadaan yhtälöpari

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\boldsymbol{U}_0\cdot\nabla\rho'+\boldsymbol{u}\cdot\nabla(\rho_0+\rho')+\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\rho'\nabla\cdot(\boldsymbol{U}_0+\boldsymbol{u})=(\rho_0+\rho')q\\(\rho_0+\rho')\left[\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{U}_0\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla(\boldsymbol{U}_0+\boldsymbol{u})\right]+\nabla p-(\rho'/\rho_0)\nabla P_0=\boldsymbol{f}\,.\end{gathered} \tag{5}$$

Äänen nopeus $c$ määritellään lausekkeella $c^2=(\partial P/\partial\rho)_{S_0}$, missä $S_0$ on vakioentropia. Äänen nopeuden "staattinen" arvo $c_0$ (raja-arvo perturbaatiokenttien voimakkuuksien lähestyessä nollaa) määritellään vastaavasti lausekkeella $c_0^2=\left[(\partial P/\partial\rho)_{S_0}\right]_{\rho_0}$. Staattisille isentrooppisille virtauksille ja perturbaatiokentille saadaan nyt

$$\begin{gathered}\nabla P_0(\rho_0)=\left[\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_{S_0}\right]_{\rho_0}\nabla\rho_0=c_0^2\nabla\rho_0\\\frac{\mathrm{d}\rho'}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\boldsymbol{U}\cdot\nabla\rho'=\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_{S_0}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=(1/c^2)\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\boldsymbol{U}\cdot\nabla p\right).\end{gathered} \tag{6}$$

Nyt yhtälöpari (5) voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho_0 \boldsymbol{u} + \rho'(\boldsymbol{U}_0 + \boldsymbol{u})] = (\rho_0 + \rho')q \\ &(\rho_0 + \rho')\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla p - c_0^2 \rho'(\nabla \rho_0 / \rho_0) + (\rho_0 + \rho')\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} \,, \end{aligned} \tag{7}$$

missä suureiden $p$ ja $\rho'$ välinen yhteys saadaan yhtälöstä (6) ja suureella $\boldsymbol{a}$ on vaihtoehtoiset esitysmuodot

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{U}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla(\boldsymbol{U}_0 + \boldsymbol{u}) = \nabla[(\boldsymbol{U}_0 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u}] - \boldsymbol{U}_0 \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u} \times [\nabla \times (\boldsymbol{U}_0 + \boldsymbol{u})]. \tag{8}$$

Isentrooppinen puristuvuus $Q$ määritellään lausekkeella $Q = (1/\rho)(\partial\rho/\partial P)_{S_0}$ ja sen "staattinen" arvo $Q_0$ lausekkeella $Q_0 = \left[(1/\rho)(\partial\rho/\partial P)_{S_0}\right]_{\rho_0}$. Äänen nopeuden avulla lausuttuna nämä ovat $Q = 1/(\rho c^2)$ ja $Q_0 = 1/(\rho_0 c_0^2)$.

## 2.1 Linearisoidut yhtälöt

Äänen nopeus $c$ on epälineaarinen funktio tiheydestä $\rho$ (tai paineesta $P$). Pienten perturbaatiokenttien yhteydessä se voidaan esittää Taylorin kehitelmänä muodossa $c^2 = c_0^2(1 + d_1\rho + d_2\rho^2 + ...)$, missä $d_1 = (1/c_0^2)(\partial c^2/\partial\rho)_{\rho_0}$, $d_2 = (1/2c_0^2)(\partial^2 c^2/\partial\rho^2)_{\rho_0}$ ...

Yhtälön (6) avulla nähdään, että jos äänennopeuden gradientti on niin pieni, että sen voidaan ajatella olevan perturbaatiosuuruusluokkaa (ensimmäistä tai korkeampaa kertalukua), niin ensimmäisen kertaluvun approksimaationa saadaan

$$\rho' = p / c_0^2 \,. \tag{9}$$

Tällöin lausekkeiden (7) ensimmäisen kertaluvun termeistä saadaan

$$\begin{aligned} &Q_0 \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{u}_c + \boldsymbol{u}_c \cdot (\nabla \rho_0 / \rho_0) = q \\ &\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla p_c - p_c(\nabla \rho_0 / \rho_0) - \rho_0[\boldsymbol{U}_0 \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} \times (\nabla \times \boldsymbol{U}_0)] = \boldsymbol{f} \,, \end{aligned} \tag{10}$$

missä linearisoitu aeroakustinen paine $p_c$ ja linearisoitu aeroakustinen nopeus $\boldsymbol{u}_c$ ovat [2]

$$p_c = p + \rho_0 \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{U}_0 \,, \quad \boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} + Q_0 p \boldsymbol{U}_0 \,. \tag{11}$$

Jos oletetaan, että staattisten kenttäsuureiden (tiheys, virtausnopeus) muutokset paikan funktioina (gradientti, divergenssi, roottori) ovat niin pieniä, että niiden voidaan katsoa olevan perturbaatiosuuruusluokkaa (ensimmäistä tai korkeampaa kertalukua), niin lausekkeesta (10) voidaan päätellä perturbaatiohiukkasnopeuden roottorin olevan toista tai korkeampaa kertalukua. Tällöin hiukkasnopeuden voidaan katsoa olevan pyörteetön ja kenttäyhtälöt saavat muodon

$$Q_0 \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{u}_c = q \,, \quad \rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla p_c = \boldsymbol{f} \,. \tag{12}$$

Lausekkeet (12) eivät ole täysin yhteneviä Jesselin ja Mangianten [7, 6] vastaavien kanssa. Tämä johtuu siitä, että he eivät ole sisällyttäneet massalähdetermiä liikemäärän säilymisen lakiin, mikä johtaa virheellisiin lopputuloksiin staattisen virtauksen läsnä ollessa.

Tasoaalloilla $p_c/u_c = p/u = \pm\, \rho_0 c_0$ [2], missä ylempää merkkiä " + " käytetään, kun tasoaalto etenee referenssisuuntaan, ja alempaa merkkiä " – " muulloin. Näin ollen yksidimensioisilla kentillä (esim. aaltoputkessa), joilla on vain $x$-muuttuja paikkakoordinaattina, ja niillä erityisesti tasoaalloilla aero-akustiset kenttäsuureet ovat

$$p_c = p(1 \pm M)\,,\ u_c = u(1 \pm M)\,, \tag{13}$$

missä ylempää merkkiä " + " käytetään, kun tasoaalto etenee positiivisen $x$-akselin suuntaan, ja alempaa merkkiä " – " muulloin ja missä $M$ on Machin luku $M = (\boldsymbol{U}_0/c_0)\cdot\mathbf{e}_x = U_0/c_0$ ollen positiivinen, jos virtaus etenee positiivisen $x$-akselin suuntaan ja negatiivinen muutoin.

## 2.2 Toisen kertaluvun yhtälöt

Yhtälöpari (7) voidaan esittää muodossa

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla\cdot\left[\rho_0 \boldsymbol{u} + \rho'(\boldsymbol{U}_0 + \boldsymbol{u})\right] = (\rho_0 + \rho')q \\
\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla p - c_0^2 \rho' \nabla\rho_0/\rho_0 + \rho_0\left(\nabla\left\{\left[\boldsymbol{U}_0 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{u}\right]\cdot\boldsymbol{u}\right\} - \boldsymbol{U}_0\times(\nabla\times\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\times\left[\nabla\times(\boldsymbol{U}_0 + \boldsymbol{u})\right]\right) \\
+ \rho'\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{U}_0\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla(\boldsymbol{U}_0 + \boldsymbol{u})\right] = \boldsymbol{f}\,.
\end{gathered} \tag{14}$$

Oletetaan samojen oletusten olevan voimassa kuin lineaaristen yhtälöiden tapauksessa, s.o. staattisten kenttämuuttujien gradientit, divergenssit ja roottorit ovat pieniä (perturbaatiosuuruusluokkaa). Käyttäen yhtälöparin (14) toista yhtälöä rekursiivisesti, käyttäen suureen $\boldsymbol{a}$ vaihtoehtoista muotoa lausekkeessa (8) ja ottamalla huomioon, että kun tarkastellaan termejä toiseen kertalukuun asti, yhteys (9) on validi toisen kertaluvun termeissä, yhtälöparia (14) voidaan approksimoida ensimmäisen ja toisen kertaluvun termein muodossa

$$\begin{gathered}
(1/\rho_0)\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{u}_c + \boldsymbol{u}_c\cdot = q(1 + Q_0 p) \\
\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla p_c - p_c\nabla\rho_0/\rho_0 - \rho_0\left[\boldsymbol{U}_0\times(\nabla\times\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{U}_0)\right] = \boldsymbol{f}(1 - Q_0 p)\,,
\end{gathered} \tag{15}$$

missä aeroakustinen paine $p_c$ ja aeroakustinen nopeus $\boldsymbol{u}_c$ määritellään nyt toiseen kertalukuun asti muodossa

$$p_c = p + \rho_0\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{U}_0 + \tfrac{1}{2}\rho_0\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} - \tfrac{1}{2}Q_0 p^2\,,\ \boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u} + (\rho'/\rho_0)\boldsymbol{U}_0 + Q_0 p\boldsymbol{u}\,. \tag{16}$$

Lausekkeissa (16) olevia toisen kertaluvun termejä tarvitaan akustisen intensiteetin ja energiatiheyden määrittelyissä myöhemmin.

# 3 AKUSTISET ENERGIASUUREET

Jos energiatasapainoyhtälö voidaan esittää muodossa

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} = -\nabla\cdot\boldsymbol{J}\ , \tag{17}$$

niin siitä voidaan identifioida kokonaisenergia massayksikköä kohti $\varepsilon$ ja energiavuovektori $\boldsymbol{J}$ [3]. Seuraavassa energiatasapainoyhtälö esitetään yllä olevassa muodossa esitettyä tarkoitusta silmälläpitäen. Tarkastelu rajoittuu ideaalifluidiin, jossa on staattinen virtaus ja jossa ei ole lähteitä. Koska energiasuureet ovat toista kertalukua, lähtökohtana on perusyhtälöt, joissa toisen kertaluvun termit ovat sisällytettynä.

Ideaalifluidin sisäisen energian $E$ (massayksikköä kohden) muutos aikayksikössä on lämpölähteiden puuttuessa [3]

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -(P/\rho)\nabla\cdot\boldsymbol{U}\ . \tag{18}$$

Massan säilyvyyslain (1) jälkimmäistä esitystä (lähteiden puuttuessa) hyödyntäen, ottamalla liikemäärän säilymislain (3) jälkimmäisen esityksen (lähteettömässä ideaalifluidissa) ja suureen $\boldsymbol{U}$ pistetulo ja yhdistämällä saatu lauseke lausekkeeseen (18) saadaan

$$-\nabla\cdot(P\boldsymbol{U}) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho E + \tfrac{1}{2}\rho\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}\right] + \nabla\cdot\left\{\left[\rho E + \tfrac{1}{2}\rho\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}\right]\boldsymbol{U}\right\} - \rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{U}\ . \tag{19}$$

Saatu lauseke on muotoa (17), jos gravitaatiotermi jätetään huomiotta. Lauseketta (19) voidaan yksinkertaistaa akustisille perturbaatiokentille. Myös ylimääräinen gravitaatiotermi voidaan eliminoida. Tarkoituksena on tehdä linearisoinnin kaltainen toimenpide, mutta siten, että kaikki termit toiseen kertalukuun asti säilytetään. Aluksi esitetään Taylorin kehitelmä

$$\begin{aligned}\rho E + \tfrac{1}{2}\rho\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U} &= \rho_0 E_0 + \tfrac{1}{2}\rho_0\boldsymbol{U}_0\cdot\boldsymbol{U}_0 \\ &+ \left[\left(\frac{\partial(\rho E)}{\partial\rho}\right)_{S_0}\right]_{\rho_0}\rho' + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2(\rho E)}{\partial\rho^2}\right)_{S_0}\right]_{\rho_0}\rho'^2 + \ldots \\ &+ \tfrac{1}{2}\rho'\boldsymbol{U}_0\cdot\boldsymbol{U}_0 + \rho_0\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{U}_0 + \rho'\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{U}_0 + \tfrac{1}{2}\rho_0\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} + \tfrac{1}{2}\rho'\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\,.\end{aligned} \tag{20}$$

Temkinin [3] mukaan termodynaamiset derivaatat yo. kaavassa ovat

$$\left(\frac{\partial(\rho E)}{\partial\rho}\right)_{S_0} = H\ ,\quad \left(\frac{\partial^2(\rho E)}{\partial\rho^2}\right)_{S0} = c^2/\rho\ , \tag{21}$$

missä $H$ on entalpia massayksikköä kohti.

Staattisia kenttiä sitova toinen yhtälö lausekkeissa (4) voidaan esittää yhtälöä (21) hyödyntäen muodossa

$$\nabla\left[H_0 + \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{U}_0 \cdot \boldsymbol{U}_0\right)\right] = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{U}_0 \times \left(\nabla \times \boldsymbol{U}_0\right). \tag{22}$$

Sijoittamalla Taylorin kehitelmä (20) yhteydet (21) huomioiden energiatasapainoyhtälöön (19), ottamalla lauseke (22) huomioon lausekkeen (19) viimeisessä termissä, jättämällä kaikki toista kertalukua korkeammat termit pois, hyödyntämällä yhteyksiä (21) ja massan säilyvyyslakia (1), käyttämällä aeroakustisten kenttäsuureiden määritelmiä (16) toisen kertaluvun termeihin asti tarvittaessa ja hyödyntämällä lauseketta (9) toisen kertaluvun suureissa yo. lauseke voidaan kirjoittaa muotoon, joka voidaan edelleen jakaa kahdeksi erikseen voimassa olevaksi yhteydeksi (viimeisen toimenpiteen perustelu alla olevan yhtälön jälkeen)

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \left(p_c \boldsymbol{u}_c\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\tfrac{1}{2}\rho_0 \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} + \tfrac{1}{2} Q_0 p^2 + \left(1/c_0^2\right) p \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{U}_0\right] \\ -\nabla \cdot \left(p_c \boldsymbol{U}_0\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{U}_0\right) - \rho_0\left[\boldsymbol{u} \times \left(\nabla \times \boldsymbol{U}_0\right)\right] \cdot \boldsymbol{U}_0 . \end{aligned} \tag{23}$$

Ensimmäisen yhtälön lausekkeissa (23) voidaan nähdä olevan erikseen voimassa aeroakustisten kenttäsuureiden määritelmien (16) ja kenttäyhtälöiden (15) avulla (toiseen kertalukuun asti, ei lähteitä). Toisen yhtälön erikseen voimassaolo voidan päätellä käyttäen yhtälöparin (15) toista yhtälöä voimalähteiden puuttuessa sekä lausekkeiden (4) ensimmäistä yhtälöä.

Yhtälöparin (23) jälkimmäisen yhtälön viimeinen termi voidaan unohtaa, koska se on toista kertalukua ja ko. yhtälön muut termit ovat ensimmäistä kertalukua. Tällöin ko. yhtälö esittää energiatasapainoyhtälöä, jossa energiavuo on peräisin aeroakustisesta paineesta ja staattisesta virtausnopeudesta. Lisäksi yhtälö on sitä muotoa, että sen kaikkien termien aikakeskiarvot häviävät. Tämän kaltaiset energiasuureet eivät ole akustisia energiasuureita. Energiavuovektorin $\boldsymbol{J}$ akustisiin kenttiin liittyvä osuus $\boldsymbol{I}$ eli akustinen intensiteetti ja tähän liittyvä energiatiheys $\rho_0\varepsilon'$ (tilavuusyksikköä kohti) voidaan näin ollen identifioida yhtölöparin (23) ensimmäisestä yhtälöstä seuraaviksi:

$$\boldsymbol{I} = p_c \boldsymbol{u}_c \,, \; \rho_0\varepsilon' = \tfrac{1}{2}\rho_0 \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} + \tfrac{1}{2} Q_0 p^2 + \left(1/c_0^2\right) p \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{U}_0 . \tag{24}$$

Akustinen intensiteetti on aeroakustisen paineen ja aeroakustisen nopeuden tulo sen sijaan, että se olisi äänenpaineen ja hiukkasnopeuden tulo kuten virtauksettomassa tilanteessa. Energiatiheys sisältää kineettisen (ensimmäinen termi) ja potentiaalienergiatiheyden (toinen termi) lisäksi lisätermin (kolmas termi), joka on verrannollinen virtauksettoman kentän intensiteettiin ja virtausnopeuteen.

On huomattava, että energiatasapainoyhtälöt (24) olisi voitu saada suoraan käyttäen aeroakustisten kenttäsuureiden lineaarisia määritelmiä (11) ja lineaarisia kenttäyhtälöitä (12). Tämä ei kuitenkaan tarkoita sitä, että kyseinen tapa olisi oikea niiden saamiseksi.

## 4 TASOMAISTEN LÄHTEIDEN LÄHDEVOIMAKKUUDET

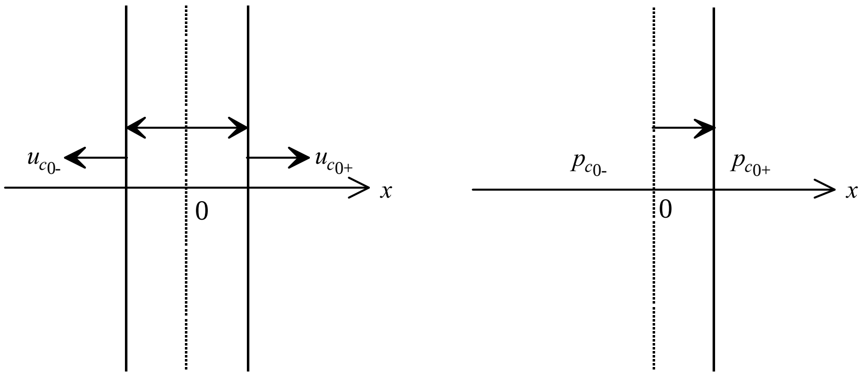
Oletetaan lähteet tasomaisiksi siten, että ne sijaitsevat tasolla $x = 0$, s.o.

$$q = q_s \delta(x) \,, \;\; \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_s \delta(x) \,, \tag{25}$$

missä $\delta(x)$ on Diracin deltafunktio. Suureet $q_s$ ja $\boldsymbol{f}_s$ ovat täten tasolähdejakaumia (tilavuusnopeus ja voima pinta-alayksikköä kohti). Sijoittamalla nämä kenttäyhtälöihin (12) voidaan havaita, että Diracin deltafunktio voidaan saada vain aeroakustisen nopeuden divergenssin epäjatkuvuudesta ja aeroakustisen paineen gradientin epäjatkuvuudesta. Integroimalla yhtälöt (12) yli pienen polun yli tason $x = 0$ voidaan nähdä, että tasolähdejakaumat liittyvät aeroakustisten kenttäsuureiden askelfunktion muotoiseen epäjatkuvuuteen. Täten monopolin voimakkuus muodostuu tason $x = 0$ eri puolilla vallitsevan aeroakustisen nopeuden ulospäisten normaalisuuntaisten komponenttien summasta ja dipolin voimakkuus muodostuu tason eri puolilla vallitsevan aeroakustisen paineen erosta

$$\begin{aligned} q_s &= (\boldsymbol{u}_{c0+} - \boldsymbol{u}_{c0-}) \cdot \mathbf{e}_x = \left(\boldsymbol{u}_{0+} - \boldsymbol{u}_{0-} + Q_0 (p_{0+} - p_{0-}) \boldsymbol{U}_0\right) \cdot \mathbf{e}_x \\ \boldsymbol{f}_s &= (p_{c0+} - p_{c0-}) \mathbf{e}_x = \left(p_{0+} - p_{0-} + \rho_0 (\boldsymbol{u}_{0+} - \boldsymbol{u}_{0-}) \cdot \boldsymbol{U}_0\right) \mathbf{e}_x \, , \end{aligned} \tag{26}$$

missä alaindeksi " 0+ " viittaa kenttäsuureisiin positiivisen $x$-akselin puolella tasoa ja " 0– " negatiivisen $x$-akselin puolella sekä $\mathbf{e}_x$ on $x$-akselin suuntainen yksikkövektori, ks. kuva 1.




*Kuva 1. Tasomonopoli- ja dipolilähde.*

Puhtaalla monopolilla on $\boldsymbol{f}_s = 0$ ja puhtaalla dipolilla $q_s = 0$, jolloin

$$\begin{aligned} p_{c0+} = p_{c0-} &\Leftrightarrow p_{0+} + \rho_0 \boldsymbol{u}_{0+} \cdot \boldsymbol{U}_0 = p_{0-} + \rho_0 \boldsymbol{u}_{0-} \cdot \boldsymbol{U}_0 \quad \text{(monopoli)} \\ \boldsymbol{u}_{c0+} \cdot \mathbf{e}_x = \boldsymbol{u}_{c0-} \cdot \mathbf{e}_x &\Leftrightarrow \left(\boldsymbol{u}_{0+} + Q_0 p_{0+} \boldsymbol{U}_0\right) \cdot \mathbf{e}_x = \left(\boldsymbol{u}_{0-} + Q_0 p_{0-} \boldsymbol{U}_0\right) \cdot \mathbf{e}_x \quad \text{(dipoli)} \ . \end{aligned} \tag{27}$$

Yksidimensioisilla kentillä, joilla on vain $x$-koordinaatti avaruudellisena muuttujana, lähdevoimakkuudet ovat tasoaallolla

$$q_s = u_{0+}(1+M) - u_{0-}(1-M) \, , \ f_s = p_{0+}(1+M) - p_{0-}(1-M) \, . \tag{28}$$

Puhtaan monopolin ja puhtaan dipolin ehdot ovat yksidimensioisessa tapauksessa tasoaallolla

$$\begin{aligned} p_{0+}(1+M) &= p_{0-}(1-M) \quad \text{(monopoli)} \\ u_{0+}(1+M) &= u_{0-}(1-M) \quad \text{(dipoli)} \ . \end{aligned} \tag{29}$$

Lausekkeen (29) mukaan monopolin tuottama äänenpaine ($p_q$) ja hiukkasnopeus ($u_q$) eri puolilleen (alaindeksit " + " ja " – ") ja dipolin tuottamat vastaavat suureet ($p_f$, $u_f$) noudattavat tasoaallon tapauksessa yhteyksiä

$$
\begin{aligned}
&p_{q-} = +p_{q+}(1+M)/(1-M)\,,\ u_{q-} = -u_{q+}(1+M)/(1-M) \\
&p_{f-} = -p_{f+}(1+M)/(1-M)\,,\ u_{f-} = +u_{f+}(1+M)/(1-M)\,.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Yhtälöryhmän (27) alkuosien mukaan vastaavat relaatiot aeroakustisille kenttäsuureille ovat

$$
p_{cq-} = +p_{cq+}\ ,\ u_{cq-} = -u_{cq+}\ ,\ p_{cf-} = -p_{cf+}\ ,\ u_{cf-} = +u_{cf+}\,. \tag{31}
$$

Nähdään, että monopoli ja dipoli säteilevät äänenpainetta ja hiukkasnopeutta epäsymmetrisesti virtauksen läsnä ollessa säteilyn ollessa voimakkaampaa virtaussuuntaa vastaan. Aeroakustisiin kenttäsuureisiin liittyvä säteily sen sijaan on symmetristä.

Puhtaan monopolin ja dipolin lähdevoimakkuudet yksidimensioisessa tapauksessa tasoaallolla ovat

$$
\begin{aligned}
&q_s = (u_{0+} - u_{0-})(1-M^2)\ \ \text{(monopoli)} \\
&f_s = (p_{0+} - p_{0-})(1-M^2)\ \ \text{(dipoli)}\ .
\end{aligned}
\tag{32}
$$

# 5 JMC-MENETELMÄN MUKAISET SEKUNDÄÄRILÄHTEET

## 5.1 JMC-menetelmä

Tarkastellaan (minkä tahansa tyyppistä) determinististä kenttää, missä lineaarinen operaattori **L** liittää lähteet ($\boldsymbol{S}$) ja kentät ($\boldsymbol{F}$) toisiinsa yhteydellä

$$
\mathbf{L}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{S}\ . \tag{33}
$$

Kentän $\boldsymbol{F}$ sijasta halutaan kenttä $\boldsymbol{F}'$, joka saadaan alkuperäisestä kentästä operaattorin **N** avulla lausekkeesta

$$
\mathbf{N}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'\ . \tag{34}
$$

Yleisessä tapauksessa kenttää $\boldsymbol{F}'$ ei voi saada vain vaihtamalla alkuperäiset lähteet modifioiduiksi lähteiksi $\boldsymbol{S}' = \mathbf{N}\boldsymbol{S}$, vaan järjestelmään täytyy lisätä lisälähteet $\boldsymbol{S}''$, jotta kenttäyhtälö (33) toteutuisi. Kirjoittamalla kenttäyhtälö halutulle kentälle $\boldsymbol{F}'$ lisälähteille (sekundäärilähteille) saadaan esitys

$$
\boldsymbol{S}'' = \mathbf{N}'\boldsymbol{F}\ ,\ \mathbf{N}' = \mathbf{LN} - \mathbf{NL}\ . \tag{35}
$$

Akustisella kentällä ideaalifluidissa differentiaalioperaattori, lähdevektori ja kenttävektori voidaan identifioida yhtälöistä (11) ja (12), kun staattisten kenttäsuureiden oletetaan muuttuvan vain vähän avaruudellisten koordinaattien suhteen niin, että niiden gradientit, divergenssit ja roottorit ovat perturbaatiokertaluokkaa tai pienempiä. Tällöin

$$
\mathbf{L} = \begin{bmatrix} Q_0(\partial/\partial t + \boldsymbol{U}_0\cdot\nabla) & \nabla\cdot \\ \nabla & \rho_0(\partial/\partial t + \boldsymbol{U}_0\cdot\nabla) \end{bmatrix},\ \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} p \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} q \\ \boldsymbol{f} \end{bmatrix}. \tag{36}
$$

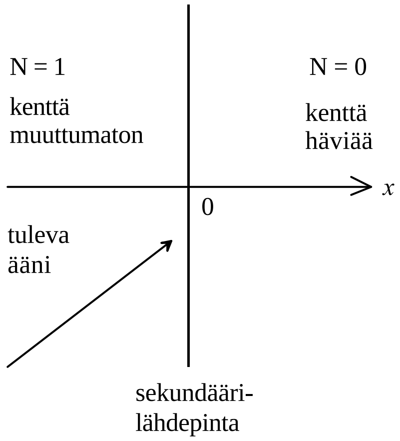
Olkoon operaattori **N** puhdas ajasta riippumaton skalaaripainotus N, joka painottaa kaikkia kenttä- ja lähdesuureita samalla tavalla. Lausekkeista (35) ja (36) saadaan aeroakustisten kenttäsuureiden määrittelyiden (11) avulla sekundäärilähdetiheydet, jotka ovat verrannollisia aeroakustisiin kenttäsuureisiin

$$q'' = \nabla \mathrm{N} \cdot \boldsymbol{u}_c \,, \;\; \boldsymbol{f}'' = (\nabla \mathrm{N}) p_c \,. \tag{37}$$

## 5.2 Tasomaiset sekundäärilähteet

Oletetaan, että operaattori N on ykkönen alueessa $x < 0$ ja nolla alueessa $x > 0$. Tällöin tavoitteena on eliminoida kenttä puoliavaruudessa $x > 0$ ja pitää se muuttumattomana alueessa $x < 0$, ks. kuva 2. Yhtälön (37) mukaan sekundäärilähteet ovat tasomaisia sijaiten tasolla $x = 0$. Vastaavat tasolähdejakaumat tasolla $x = 0$ saadaan integroimalla lähdetiheyksien lausekkeet pienen polun yli läpi tason $x = 0$, jolloin saadaan

$$q_s'' = -\boldsymbol{u}_c \cdot \mathbf{e}_x \,, \;\; \boldsymbol{f}_s'' = -p_c \mathbf{e}_x \,. \tag{38}$$




*Kuva 2. Tasomaiset sekundäärilähteet JMC-menetelmässä aktiivisessa vaimennuksessa.*

Yksidimensioisilla kentillä ja positiivisen $x$-akselin suuntaan etenevillä tasoaalloilla

$$q_s'' = -u(1+M)\,, \;\; f_s'' = -p(1+M)\,. \tag{39}$$

Dipolin voimakkuus poikkeaa referenssissä [7] esitetystä johtuen ko. referenssin virheellisestä liikemäärän säilymislaista, kuten kohdan 2.1 lopussa esitettiin.

Lausekkeiden (32) ja (39) mukaan monopolin ja dipolin aiheuttamat painemuutokset ($\Delta p_q$, $\Delta p_f$), monopolin ja dipolin aiheuttamat nopeusmuutokset ($\Delta u_q$, $\Delta u_f$) sekä kenttien kokonaismuutokset ($\Delta p$, $\Delta u$) ovat tässä tapauksessa

$$\begin{aligned} &\Delta p_q = pM/(1-M)\,, \;\; \Delta p_f = -p/(1-M)\,, \;\; \Delta p = \Delta p_q + \Delta p_f = -p \\ &\Delta u_q = -u/(1-M)\,, \;\; \Delta u_f = uM/(1-M)\,, \;\; \Delta u = \Delta u_q + \Delta u_f = -u\,. \end{aligned} \tag{40}$$

Monopolin eri puolilleen (alaindeksit " + " ja " – ") aiheuttama hiukkasnopeus ($u_q$) ja äänenpaine ($p_q$) ovat tässä tapauksessa yhtälöiden (29), (32), (39) ja (40) mukaan

$$u_{q-} = +\tfrac{1}{2}u(1+M)/(1-M)\,, \;\; u_{q+} = -\tfrac{1}{2}u\,, \;\; p_{q-} = -\tfrac{1}{2}p(1+M)/(1-M)\,, \;\; p_{q+} = -\tfrac{1}{2}p\,. \tag{41}$$

Dipolin eri puolilleen aiheuttama äänenpaine ($p_q$) ja hiukkasnopeus ($u_q$) ovat samaten

$$p_{f-} = +\tfrac{1}{2} p(1+M)/(1-M)\,,\; p_{f+} = -\tfrac{1}{2} p\,,\; u_{f-} = -\tfrac{1}{2} u(1+M)/(1-M)\,,\; u_{f+} = -\tfrac{1}{2} u\,. \quad (42)$$

Vastaavat aeroakustiset suureet ovat yhtälön (13) mukaan

$$\begin{aligned} &u_{cq-} = +\tfrac{1}{2} u(1+M)\,,\; u_{cq+} = -\tfrac{1}{2} u(1+M)\,,\; p_{cq-} = p_{cq+} = -\tfrac{1}{2} p(1+M) \\ &p_{cf-} = +\tfrac{1}{2} p(1+M)\,,\; p_{cf+} = -\tfrac{1}{2} p(1+M)\,,\; u_{cf-} = u_{cf+} = -\tfrac{1}{2} u(1+M)\,. \end{aligned} \quad (43)$$

## 6 YHTEENVETO

JMC-menetelmän mukaiset aktuaattorit koostuvat monopoli- ja dipolilähteistä. Tasomaiset monopoli- ja dipolilähteet sekä niiden lähdevoimakkuudet on määritelty fluidille, jossa on tasainen staattinen virtaus. Lisäksi on määritelty lähdevoimakkuudet, joita tarvitaan JMC-menetelmän soveltamisesssa edellä esitetyissä olosuhteissa. Sekä lähdevoimakkuuksien määritelmät että JMC-menetelmän edellyttämät lähdevoimakkuudet riippuvat virtauksen Machin luvusta. Virtaamattomassa väliaineessa tasomaisen monopolin voimakkuutta voidaan luonnehtia hiukkasnopeuden epäjatkuvuudella ja dipolin voimakkuutta äänenpaineen epäjatkuvuudella lähdepinnalla. Virtauksellisessa väliaineessa ko. lähdetyyppien voimakkuutta voidaan luonnehtia ns. aeroakustisen nopeuden ja aeroakustisen paineen epäjatkuvuudella, jotka kumpikin ovat funktioita sekä akustisesta äänenpaineesta, hiukkasnopeudesta että virtausnopeudesta. Monopoli ja dipoli säteilevät virtauksen läsnä ollessa äänenpainetta ja hiukkasnopeutta heikommin virtaussuuntaan kuin sitä vastaan.

Tarkastelun perustana on esitetty akustiikan perusyhtälöt ja energiatasapainoyhtälöt sekä niiden perusteella määritetty aeroakustisten kenttäsuureiden lisäksi intensiteetti ja energiatiheys virtaavassa väliaineessa. Viimeksi mainittujen määritelmät poikkeavat virtaamattoman väliaineen vastaavista ollen myös funktioita virtauksen Machin luvusta. Akustinen intensiteetti on mainitujen aeroakustisten kenttäsuureiden tulo ja akustinen energiatiheys sisältää kineettisen ja potentiaalienergian lisäksi sekä äänenpaineesta, hiukkasnopeudesta että virtausnopeudesta riippuvan lisätermin.

## LÄHTEET


1. GOLDSTEIN M E, *Aeroacoustics*. McGraw-Hill, New York et al. 1976.
2. MUNJAL M L, *Acoustics of ducts and mufflers*. John Wiley & Sons, New York et al. 1987.
3. TEMKIN S, *Elements of acoustics*. John Wiley & Sons, New York et al. 1981.
4. UOSUKAINEN S, JMC method in active control of sound. *ISMA 23,* 16.–18.9.1998, Leuven, 729–736.
5. JESSEL M J M, Active noise reduction as an experimental application of the general system theory. *Inter-Noise 83*, 13.–15.7.1983, Edinburgh, 411–414.
6. JESSEL M J M, *Acoustique théorique – Propagation et holophonie.* Masson et Cie, Paris 1973.
7. JESSEL M J M & MANGIANTE G A, Active sound absorbers in an air duct. *J Sound Vib* **23**(1972)3, 383–390.