AKUSTISTEN ANALOGIOIDEN PERUSTEET

Seppo Uosukainen

VTT
PL 1000, 02044 VTT
etunimi.sukunimi@vtt.fi

1 JOHDANTO

Tässä artikkelissa esitetään tunnetuimmat akustiset analogiat ja niiden rajoitukset. Akustisia analogioita käytetään kuvaamaan virtauksen ja sen synnyttämän äänikentän välistä yhteyttä. Esitys pohjautuu Uosukaisen julkaisuun [1], jossa analogioiden yhtälöt on johdettu yksityiskohtaisesti tarkoituksena ollen selvittää, mitä niiden johtamisessa on jouduttu olettamaan ja missä vaiheessa. Tämä mahdollistaa niiden sovellettavuuden laajentamisen tarvittaessa.

Analogiat on jaettu kolmeen kategoriaan: tiheyspohjaiset, pi-pohjaiset ja entalpiapohjaiset analogiat. Jako perustuu analogioissa käytettäviin peruskenttäsureisiin. Lighthillin analogia, Powellin analogia, Ffowcs Williamsin–Hawkinsin analogia ja Curlen analogia on kategorioitu tiheyspohjaisiin, Phillipsin analogia ja Lilleyn analogia pi-pohjaisiin sekä Howen analogia ja Doakin analogia entalpiapohjaisiin analogioihin. Analogioiden matemaattinen kompleksisuus kasvaa niiden esittämisjärjestyksessä lukuun ottamatta Powellin ja Curlen analogioita, jotka ovat approksimaatioita niitä ennen esitetyistä.

Akustisissa analogioissa virtausherätteisiä akustisia kenttiä hallitsevat yhtälöt järjestellään siten, että vasemmalla puolella ovat kenttämuuttujayhteydet (aalto-operaattoriosa) ja oikealla puolella jotakin, jonka oletetaan muodostavan akustisen kentän lähdesuureet (lähdeosa), eli muotoon

$$Lf = g, \tag{1}$$

missä Lf on aalto-operaattoriosa sisältäen operaattorin L ja laskettavan kenttäsuureen f, ja g on lähdesuure kentälle f. Yhtälön oikealla puolella oleva lähdeosa tulee tuntea etukäteen tai yhtälö tulee ratkaista iteratiivisesti, jolloin lähdeosa tarkentuu joka iteraatiokierroksella.

Paitsi että analogiat perustuvat eri kenttämuuttujiin, ne eroavat toisistaan myös lähdetermien ja aalto-operaattoriosan määrittelyn suhteen. Yhtälön uudelleenjärjestelylle ei ole yksikäsitteistä totuutta, vaan sitä voidaan jopa pitää mielipidekysymyksenä. Lähdetermit kerätään useimmiten kenttämuuttujatermeistä ja todellisia akustisia lähteitä käytetään harvoin. Todellisilla akustisilla lähteillä tarkoitetaan tässä monopoleihin lukeutuvia massalähteitä (tilavuusnopeuslähteitä) ja lämpölähteitä, dipoleihin lukeutuvia voimalähteitä sekä kvadrupoleihin lukeutuvia liikemäärälähteitä [2].

2 TIHEYSPOHJAISET ANALOGIAT

Tiheyspohjaiset analogiat käyttävät äänenpainetta p tai tiheyden perturbaatiokomponenttia ρ' kenttäsuureena. Kumpaakin näistä voi käyttää, mikäli perturbaatioentropiamuutokset voidaan olettaa pieniksi, jolloin kenttäsuureiden välinen suhde on äänennopeuden neliö.

2.1 Lighthillin analogia

Lighthill julkaisi ensimmäiset virtausherätteistä ääntä käsittelevät artikkelinsa vuosina 1952 ja 1954 [3, 4]. Tätä voidaan pitää aeroakustiikan syntynä [5]. Lighthillin analogia on alunperin kehitetty rajoittamattomille virtauksille ilman lämpölähteitä, esimerkiksi vanhoja suihkumoottoreita silmälläpitäen. Analogian yhtälön johdossa on oletettu lähdealueen ulkopuolisesta alueesta, että siellä ei ole staattista virtausta ja että fluidi on ideaalinen, jolloin siinä ei ole viskoottisia eikä termisiä häviöitä. Äänen taittumista ei oteta huomioon ja staattisten kenttäsuureiden gradientit oletetaan pieniksi.

Lähteenä analogiassa on Lighthillin jännitysdyadi (-tensori) $\overline{\overline{T}}_L$, joka on kvadrupolityyppinen jakauma. Lähteen merkittävin tekijä on Reynoldsin jännitys $\rho\vec{U}\vec{U}$, missä ρ on tiheys ja $\vec{U}$ on hiukkasnopeus. Tästä seuraa, että fysikaalisena lähteenä voidaan pitää hiukkasnopeuden spatiaalisia vaihteluita. Lähteen muut tekijät liittyvät akustisen kentän entropiamuutoksiin ja viskoottisiin leikkausjännityksiin, jotka aiheuttavat termisiä ja viskoottisia häviöitä lähdealueessa. Analogiassa ei oteta huomioon massa-, lämpö-, voima- eikä liikemäärälähteitä.

2.2 Powellin analogia

Powellin analogia [6] on Lighthillin analogian approksimaatio, missä fluidi oletetaan ideaaliseksi myös lähdealueessa ja lähdealueessa fluidi oletetaan myös kokoonpuristumattomaksi. Lähde analogiassa on dipolityyppinen jakauma $\vec{f}_P$. Lähteen merkittävin tekijä on Corioliskiihtyvyys $-\vec{\omega}\times\vec{U}$, joka on verrannollinen hiukkasnopeuden pyörteisyyteen $\vec{\omega}=\nabla\times\vec{U}$.

2.3 Ffowcs Williamsin–Hawkinsin analogia

Ffowcs Williamsin–Hawkinsin analogia [7] on Lighthillin analogian laajennus siten, että liikkuvien rajapintojen vaikutus on otettavissa huomioon ekvivalenttisilla Huygensin lähteillä rajapinnoilla. Kyseiset lähteet sisältävät pintamonopolijakauman q_{WS} ('paksuuslähde', *thickness source*), joka on verrannollinen hiukkasnopeuden normaalikomponenttiin rajapinnalla, sekä pintadipolijakauman $\vec{f}_{WS}$, ('kuormituslähde', *loading source*), joka on verrannollinen äänenpaineeseen ja viskoottisiin jännityksiin pinnalla. Jos rajapintojen sisällä olevan tilavuuden muodonmuutos on kokoonpuristumatonta, pintamonopolijakauma voidaan korvata pintojen sisällä olevilla tilavuusdipoli- ja tilavuuskvadrupolijakaumilla.

Laajennuksen tarkoitus on ottaa huomion kiinteän pinnan vuorovaikutus virtausäänen syntyyn esimerkiksi helikoptereiden roottoreiden, lentokoneiden ja laivojen potkurien sekä lentokoneiden moottorin puhaltimien, kompressoreiden ja turbiinien yhteydessä [8]. Ffowcs Williamsin–Hawkinsin analogialla on näin ollen huomattavasti laajempi hyödynnettävyyspotentiaali kuin aikaisemmilla analogioilla.

Jos primäärilähde on liikkuva rajapinta, Lighthillin jännitysdyadi äänilähteenä voidaan usein jättää huomioonottamatta ja käyttää lähteinä vain ekvivalenttisia pintalähteitä. Tämä on validia tyypillisesti helikoptereiden roottoreiden [9] ja laivojen potkurien [10] yhteydessä.

Analogiaa voidaan myös modifioida siten, että liikkumattomien rajapintojen vaikutus liikkuvassa väliaineessa otetaan huomioon. Tällöin esimerkiksi ilmaa ohjaavien pintojen vaikutus puhallin- ja kanavistomelusovelluksissa voidaan mallintaa [5].

2.4 Curlen analogia

Curlen analogia [11] on Ffowcs Williamsin–Hawkinsin analogian approksimaatio, jossa rajapinnat oletetaan liikkumattomiksi. Tällöin Ffowcs Williamsin–Hawkinsin analogiassa esiintyvät ekvivalenttiset pintamonopolijakaumat häviävät.

3 PI-POHJAISET ANALOGIAT

Pi-pohjaiset analogiat käyttävät skaalattua logaritmista painetta Π kenttäsuureena. Kummassakin esitettävässä analogiassa on lähtökohtana ideaalikaasuapproksimaatio, joten ilman modifikaatioita niitä ei voi soveltaa akustisiin kenttiin nesteissä.

3.1 Phillipsin analogia

Phillipsin analogiassa [12] konvektiivinen termi yhtälön oikealta puolelta on siirretty vasemmalle, jolloin liikkuvan väliaineen vaikutukset on osittain otettavissa huomioon. Myös äänen nopeuden c gradientti on sisällytetty yhtälön vasemmalle puolelle, jolloin äänen taittumisilmiöt on otettavissa huomioon. Analogian yhtälön johdossa on oletettu fluidi lähdealueen ulkopuolella ideaaliseksi, jolloin siinä ei ole viskoottisia eikä termisiä häviöitä. Lämpölähteet on otettavissa huomioon. Analogiassa ei oteta huomioon massa-, voima- eikä liikemäärälähteitä.

3.2 Lilleyn analogia

Lilleyn analogia [13] on Phillipsin analogian parannus siten, että kaikki ’etenemisvaikutukset’, joita esiintyy virtausten sekoittumisessa (*transversely sheared mean flow*), on siirretty yhtälön vasemmalle puolelle. Näin liikkuvan väliaineen vaikutukset on otettavissa huomioon kattavammin. Muuten Lilleyn analogiassa on sama lähtökohta ja samat oletukset kuin Phillipsin analogiassa.

Pi-pohjaiset analogiat ja erityisesti Lilleyn analogia on kehitetty suuren ohivirtaussuhteen omaavien suihkumoottoreiden virtausmelun mallintamiseksi. Konvektion ja taittumisen aiheuttamien vaikutusten ottaminen huomioon pi-pohjaisissa analogioissa lisää ratkaisujen kompleksisuutta merkittävästi ja vain rajoitettu määrä ratkaisuja on toteutettu [8].

4 ENTALPIAPOHJAISET ANALOGIAT

Entalpiapohjaiset analogiat käyttävät stagnaatioentalpiaa B kenttäsuureena. Kummassakin esitettävässä analogiassa on lähtökohtana ideaalikaasuapproksimaatio, joten ilman modifikaatioita niitä ei voi soveltaa akustisiin kenttiin nesteissä.

4.1 Howen analogia

Howen analogiassa [14] pääosa lähdetermeistä pohjautuu entropiagradientteihin ∇S ja Coriolis-kiihtyvyyteen, joka on verrannollinen hiukkasnopeuden pyörteisyyteen $\vec{\omega}$. Nämä suureet häviävät lähdealueen ulkopuolella. Entropian aikaderivaatat osittain muodostavat myös lähdetermejä. Analogian yhtälön johdossa väliaineen puristuvuus on oletettu vakioksi ja viskoottiset häviöt merkityksettömiksi. Termiset häviöt lähdealueessa ja jossain määrin sen ulkopuolella on otettavissa huomioon. Lämpölähteet on otettavissa huomioon. Analogiassa ei oteta huomioon massa-, voima- eikä liikemäärälähteitä. Howen analogiaa ei ole laajalti käytetty; sitä on sovellettu ainakin huilun tuottaman äänen mallintamiseen.

4.2 Doakin analogia

Doakin analogiassa [15, 16] väliaineen puristuvuuden ei tarvitse olla vakio, hiukkasnopeuden pyörteisyyden ja entropiagradienttien ei tarvitse hävitä lähdealueen ulkopuolella, viskoottiset ja termiset häviöt on otettavissa huomioon jollain tavalla sekä voimalähteet $\vec{F}$ on otettavissa huomioon. Muuten Doakin analogiassa on sama lähtökohta ja samat oletukset kuin Howen analogiassa. Doakin analogiaa ei ole käytetty todellisissa sovelluksissa.

Entalpiapohjaisten analogioiden perusteella hiukkasnopeuden pyörteisyys Coriolis-kiihtyvyyden muodossa on äänen aerodynaamisen syntymisen päätekijä yleensä. Tämä johtopäätös on vedettävissä myös Powellin analogiasta.

5 AKUSTISTEN ANALOGIOIDEN YHTÄLÖT

Ohessa on analogioiden yhtälöt esitettynä dyadimerkintätavalla. Tarkemmat selitykset niiden eri parametreille saa viitteestä [1].

Lighthillin analogia:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \rho' = \nabla\nabla : \overline{\overline{T}}_L \tag{2}$$

Powellin analogia:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \rho' = -\nabla \cdot \vec{f}_P \tag{3}$$

Ffowcs Williams–Hawkinsin analogia:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \rho' = \frac{\partial\left[q_{WS}\delta(w_1 - w_{10})\right]}{\partial t} - \nabla \cdot \left[\vec{f}_{WS}\delta(w_1 - w_{10})\right] + \nabla\nabla : \left[\overline{\overline{T}}_L H(w_1 - w_{10})\right] \tag{4}$$

Curlen analogia:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \rho' = -\nabla \cdot \left[\vec{f}_{WS}\delta(w_1 - w_{10})\right] + \nabla\nabla : \left[\overline{\overline{T}}_L H(w_1 - w_{10})\right] \tag{5}$$

Phillipsin analogia:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \Pi}{\mathrm{d}t^2} - \nabla \cdot \left(c^2 \nabla \Pi\right) = \left(\nabla \vec{U}\right)_{\mathrm{T}} : \left(\nabla \vec{U}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{c_P}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T}\right) - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho}\nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}}_\mu\right) \tag{6}$$

Lilleyn analogia:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}^2 \Pi}{\mathrm{d}t^2} - \nabla \cdot \left(c^2 \nabla \Pi\right)\right] + 2\left(\nabla \vec{U}\right)_{\mathrm{T}} : \nabla\left(c^2 \nabla \Pi\right) = -2\left(\nabla \vec{U}\right)_{\mathrm{T}} : \left[\left(\nabla \vec{U}\right) \cdot \left(\nabla \vec{U}\right)\right] + \Psi \tag{7}$$

$$\Psi = 2\left(\nabla \vec{U}\right)_{\mathrm{T}} : \nabla\left(\frac{1}{\rho}\nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}}_\mu\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho}\nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}}_\mu\right)\right] + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{1}{c_P}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T}\right) \tag{8}$$

Howen analogia:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}t}\cdot\nabla B-\nabla^2 B\\&=\nabla\cdot\left(\vec{\omega}\times\vec{U}-T\nabla S\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}t}\cdot\left(\vec{\omega}\times\vec{U}-T\nabla S\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{T}{c^2}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c_P}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right)\end{aligned}\tag{9}$$

Doakin analogia:

$$\begin{aligned}&\nabla^2 B'-\left\{\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\vec{U}\vec{U}:\nabla\nabla+\left(2\vec{U}\frac{\partial}{\partial t}+\vec{\omega}\times\vec{U}+\vec{V}-2\nabla H\right)\cdot\nabla\right]B'\right\}'\\&=\left(\left\{-(\nabla\cdot)+\frac{1}{c^2}\left[\vec{U}\vec{U}:\nabla+\left(\vec{\omega}\times\vec{U}+\vec{V}-2\nabla H\right)\cdot\right]\right\}\left[\left(\vec{\omega}\times\vec{U}\right)'-\vec{V}'-\overline{\left(\frac{\partial\vec{U}'}{\partial t}\right)}\right]\right)'\\&\quad+\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\right)'\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right]'-\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right)'\right]'-\left[\frac{1}{c^2}\vec{U}\cdot\frac{\partial\vec{V}'}{\partial t}\right]'\end{aligned}\tag{10}$$

$$\vec{V}=T\nabla S+\frac{1}{\rho}\left(\nabla\cdot\overline{\overline{\sigma}}_{\mu}+\vec{F}\right)\tag{11}$$

6 YHTEENVETO

Lighthillin analogia on alun perin kehitetty rajoittamattomille virtauksille. Analogiassa oletetaan, että lähdealueen ulkopuolella ei ole staattista virtausta. Aalto-operaattori ei sisällä aallon taittumisen vaikutuksia. Powellin analogia on approksimaatio Lighthillin analogiasta mm. siten, että fluidi oletetaan kokoonpuristumattomaksi lähdealueessa. Ffowcs Williamsin–Hawkinsin analogia on Lighthillin analogian laajennus siten että se ottaa huomioon liikkuvien rajapintojen vaikutukset ekvivalenttisilla Huygensin lähteillä. Curlen analogia saadaan Ffowcs Williamsin–Hawkinsin analogiasta olettamalla rajapinnat liikkumattomiksi. Phillipsin analogiassa liikkuvan väliaineen vaikutukset otetaan osittain huomioon ja aallon taittumisen vaikutukset sisältyvät aalto-operaattoriin. Lilleyn analogia on Phillipsin analogian parannus, missä kaikki virtausten sekoittumisessa esiintyvät ’etenemisvaikutukset’ ovat yhtälön aalto-operaattoripuolella. Howen analogiassa pyörteisyysvektori (Coriolis-kiihtyvyyden muodossa) ja entropiagradientit on sijoitettu yhtälön lähdepuolelle niiden muodostaessa pääosan lähteistä. Doakin analogiassa pyörteisyyden ja entropiagradienttien ei tarvitse hävitä lähdealueen ulkopuolella ja myös joitakin muita Howen analogian rajoituksia on siitä saatu poistetuksi.

Neljässä viimeiseksi esitetyssä analogiassa väliaine oletetaan ideaalikaasuksi, joten ilman modifikaatioita niitä ei voi soveltaa akustisiin kenttiin nesteissä.

KIITOKSET

Tämä tutkimustyö on tehty Tekesin rahoituksella FIMECC SHOKin EFFIMA-ohjelman (Energy and Lifecycle Efficient Machines) SEEE-projektin (Ship’s Energy Efficiency and Environment) UNNO-tehtävässä (Underwater Noise).

VIITTEET

[1] UOSUKAINEN S, *Foundations of acoustic analogies.* VTT Publications 757, Espoo 2011. http://www.vtt.fi/inf/pdf/publications/2011/P757.pdf

[2] UOSUKAINEN S, *Akustinen kenttäteoria.* Luentomoniste. Aalto-yliopiston teknillinen korkeakoulu, Espoo 2010.

[3] LIGHTHILL M J, On sound generated aerodynamically. I General theory. *Proc Royal Soc* **211A** (1952), 564–587.

[4] LIGHTHILL M J, On sound generated aerodynamically. II Turbulence as a source of sound. *Proc Royal Soc* **222A**(1954), 1–32.

[5] KARJALAINEN A, *Akustisia analogioita: Kuinka yhdistää virtaus ja ääni.* VTT Report TUR A005, Tampere 2000.

[6] POWELL A, Theory of vortex sound. *J Acoust Soc Am* **36**(1964)1, 177–195.

[7] WILLIAMS J E F & HAWKINGS D L, Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Phil Trans R Soc Lond A* **264**(1969), 321–342.

[8] GOLDSTEIN M E, *Aeroacoustics*. McGraw–Hill, New York 1976.

[9] FARASSAT F, *Theory of Noise Generation from Moving Bodies with an application to Helicopter Rotors.* NASA Technical Report TR–451. Washington, D. C. 1975.

[10] TESTA C & IANNIELLO S & SALVATORE F & GENNARETTI M, Numerical approaches for hydroacoustic analysis of marine propellers. *J Ship Res* **52**(2008)1, 57–70.

[11] CURLE N, The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound. *Proc Royal Soc A* **231** (1955), 505–514.

[12] PHILLIPS O M, On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers. *J Fluid Mech* **9**(1960)1, 1–28.

[13] LILLEY G M, On the noise from jets. *Noise Mechanism*, AGARD-CP-131(1974), 13.1–13.12.

[14] HOWE M S, Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute. *J Fluid Mech* **71**(1975)4, 625–673.

[15] DOAK P E, Fluctuating total enthalpy as a generalized acoustic field. *Acoustical Physics* **41**(1995)5, 677–685.

[16] DOAK P E, Fluctuating total enthalpy as the basic generalized acoustic field. *Theoret Comput Fluid Dynamics* **10**(1998), 115–133.