PUTKIKELLON SUUNNITTELU

Matti A Ranta

Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
PL 1100, 02015 Espoo
matti.ranta@tkk.fi

1 JOHDANTO

Putkikellot kuuluvat lyömäsoitinten ryhmään. Putkikellot koostuvat eripituisista viritetyistä metalliputkista. Ne on tavallisesti valmistettu messingistä. Putket ovat yleensä halkaisijaltaan 30-40mm ja pituudeltaan 75-155cm. Ääni syntyy, kun putkia lyödään pienellä nahka- tai muovivasaralla. Viitteet [1], [2] ja [3].

Värähtelevän palkin teorian [4] avulla tietylle frekvenssille viritettävän putken pituus voidaan laskea eri reunaehtoja vastaamaan. Värähtelevän palkin osittaisdifferentiaaliyhtälö voidaan ratkaista ns. muuttujien erottamiskeinoa käyttäen. Se johtaa transkendenttifunktioon (16), jonka ratkaisu määrittää putken pituuden kaavan (22) avulla.

2 VÄRÄHTELEVÄN PALKIN TEORIAA

Teknillisen taivutusopin perusteet löytyvät helposti kirjallisuudesta [4]. Tarkastellaan infinitesimaalista dx-pituista palkkialkiota, johon vaikuttaa momentti M, leikkausvoima Q ja ulkoinen kuormitus p.

Palkkialkion tasapainosta saadaan yhtälöt

$$\frac{dM}{dx} = Q \tag{1}$$

$$\frac{dQ}{dx} = -p \tag{2}$$

Olkoon E palkin materiaalin kimmokerroin ja ρ sen tiheys. Palkin poikkileikkauksen muoto ja koko määrittää palkin jäyhyysmomentin I ja pinta-alan A. Merkitään x-derivaattaa pilkulla ja t- eli aikaderivaattaa pisteellä taipuman y päällä.

Teknillinen taivutusoppi antaa yhtälöt

$$M = -EI\, y'' \tag{3}$$

$$p = -\rho A \ddot{y} \tag{4}$$

Yhtälö (4) on palkin massan hitaudesta johtuva kuormitustermi. Sijoitetaan yhtälö (1) yhtälöön (2) ja siihen sitten yhtälöt (3) ja (4). Päädytään vakiopoikkipintaisen palkin poikittaisvärähtelyjen osittaisdifferentiaaliyhtälöön

$$\ddot{y}(t,x) + \frac{EI}{\rho A} y''''(t,x) = 0 \tag{5}$$

3 MUUTTUJIEN EROTTAMINEN

Niin sanottu muuttujien erottaminen on osoittautunut tehokkaaksi keinoksi värähtelyprobleemoiden käsittelyssä. Etsitään yhtälön (5) ratkaisua muodossa

$$\ddot{y}(t,x) + \frac{EI}{\rho A} y''''(t,x) = 0 \tag{6}$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (5) ja jaetaan tulolla TY

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} + \frac{EI}{\rho A}\frac{Y''''(x)}{Y(x)} = 0 \tag{7}$$

Yhtälö hajoaa kahden termin summaksi, joista ensimmäinen riippuu vain ajasta t ja toinen paikkakoordinaatista x. Tämä on mahdollista vain, jos kumpikin termi on vakio.

Saadaksemme ajasta harmonisesti riippuvan ratkaisun merkitään ensin separoimisparametri

$$\ddot{T}(t)/T(t) = -\omega^2 \tag{9}$$

joka antaa ratkaisut $\sin \omega t$ ja $\cos \omega t$.

Toiseksi x:stä eli paikasta riippuvaksi yhtälöksi tulee

$$Y''''(x) - \frac{\rho A \omega^2}{EI} Y(t) = 0 \tag{10}$$

Käytetään lyhennysmerkintää

$$\left(\frac{\beta}{l}\right)^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \tag{11}$$

Yritetään koeratkaisua $Y(x) = e^{rx}$ ja sijoitetaan yhtälöön (10). Saadaan tulos $\left[r^4 - (\beta/l)^4\right] Y(x) = 0$, joka toteutuu, jos vakio r saa arvot $r_{1,2} = \pm \beta/l$ tai $r_{3,4} = \pm i\beta/l$.

Paikasta riippuva osuus $Y(x)$ muodostuu funktioista

$$Y(x) = A\cosh(\beta x/l) + B\cos(\beta x/l) + C\sinh(\beta x/l) + D\sin(\beta x/l) \tag{12}$$

4 REUNAEHDOT MÄÄRITTÄVÄT OMINAISMUODOT

Kiinnitystavasta johtuen palkilla on ripustuspisteessä $x = 0$ nivel, jossa sekä taipuma että momentti häviävät eli kaavojen (12) ja (3) mukaan ehdot ovat

$$Y(0) = 0 \quad \Rightarrow A + B = 0 \quad \text{ja} \quad Y''(0) = 0 \quad \Rightarrow A - B = 0 \quad \text{tulos} \quad \text{on} \quad A = B = 0 \tag{13}$$

Vapaassa alapäässä $x = l$ häviävät sekä momentti että leikkausvoima eli kaavojen (1) ja (3) perusteella ehdot ovat

$$Y''(l) = 0 \quad \Rightarrow C\sinh\beta - D\sin\beta = 0 \quad \text{ja} \quad Y'''(l) = 0 \quad \Rightarrow C\cosh\beta - D\cos\beta = 0 \tag{14}$$

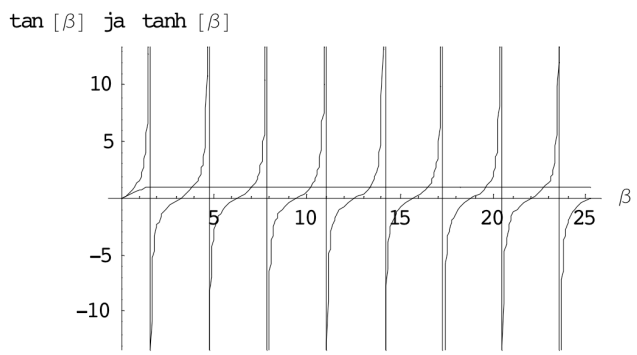
Nämä ehdot toteutuvat, jos yhtä aikaa on voimassa

$$\frac{C}{D} = \frac{\sin\beta}{\sinh\beta} = \frac{\cos\beta}{\cosh\beta} \tag{15}$$

Tämä on mahdollista, jos β on transkendenttisen yhtälön

$$\tan\beta = \tanh\beta \tag{16}$$

juuri. Kuten seuraavasta kuvasta nähdään, on tällä yhtälöllä äärettömän monta juurta



Kuva 1. *Yhtälön* $\tan\beta = \tanh\beta$ *juuret.*

Taulukko 1. Yhtälön (16) kuusi ensimmäistä juurta

β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
3,9266	7,0686	10,2102	13,3518	16,4934	19,6350

Koska $\tanh\beta_i \to 1$ kun i on suuri, saadaan juuret ensimmäistä ehkä lukuun ottamatta likikaavasta $\tan\beta_i = 1$. Ne siis ovat

$$\beta_i \cong \left(i + 1/4\right)\pi \tag{17}$$

Tämä likikaava antaa ensimmäisen juuren kohdalla liian suuren arvon. Sen jälkeen ero on korkeintaan luokkaa 10^{-7}, eli merkityksetön. Värähtely-yhtälön (5) ratkaisu voidaan nyt ehdon (15) ja uusien integroimisvakioiden *A* ja *B* avulla esittää sarjamuodossa

$$y\left(t,x\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(A_i \sin\omega_i t + B_i \cos\omega_i t\right)\left[\sin\beta_i \sinh\left(\beta_i x/l\right) + \sinh\beta_i \sin\left(\beta_i x/l\right)\right] \tag{18}$$

Tässä on moodin muotoa esittävä funktio

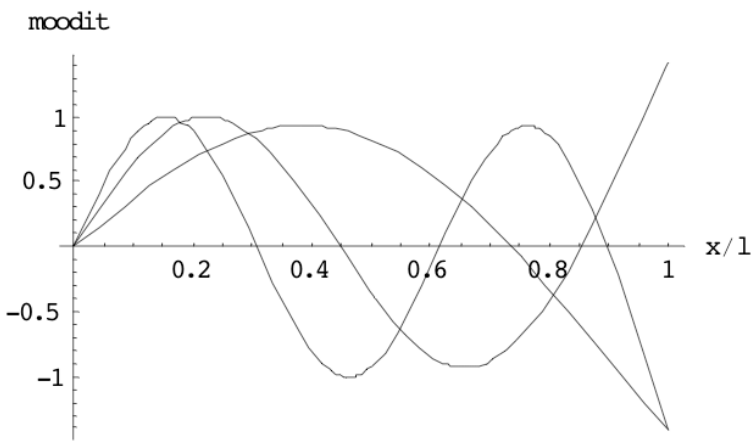
$$Y_i\left(x\right) = \sin\beta_i \sinh\left(\beta_i x/l\right) + \sinh\beta_i \sin\left(\beta_i x/l\right) \tag{19}$$

Separoimisparametri ω_i riippuu merkinnän (11) perusteella ominaisarvosta β_i eli

$$l^2\omega_i = \beta_i^2\sqrt{\frac{E}{\rho}}\sqrt{\frac{I}{A}} \tag{20}$$

Reunaehdot määrittivät frekvenssit ja ominaismuodot mutta alkuehdot määrittäisivät värähtelyjen amplitudin. Amplitudia ei useinkaan tarvitse ratkaista.

Seuraavassa kuvassa näemme kolme ensimmäistä moodia kaavasta (19) $\sinh\beta_i$:lla skaalattuina



Kuva 2. *Värähtelyprobleeman kolme ensimmäistä skaalattua moodia.*

5 PUTKEN PITUUDEN JA VÄRÄHDYSLUVUN VÄLINEN YHTEYS

Koska $\omega_i = 2\pi f_i$, saadaan kaavasta (20) putken pituuden ja frekvenssin neliöjuuren välinen riippuvuus

$$l\sqrt{f_i} = \frac{\beta_i}{\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{\frac{E}{\rho}}\sqrt{\frac{I}{A}}\right)^{1/2} \tag{21}$$

Tästä kaavasta nähdään, että putken pituuden ja sen ensimmäisen värähdysluvun neliöjuuren tulo riippuu tuentatavasta johtuvasta vakiosta $\beta_1/\sqrt{2\pi} \cong 1{,}56649$ sekä äänennopeudesta $c = \sqrt{E/\rho}$ palkin materiaalissa ja poikkileikkauksen geometriasta $\sqrt{I/A}$.

6 ESIMERKKI

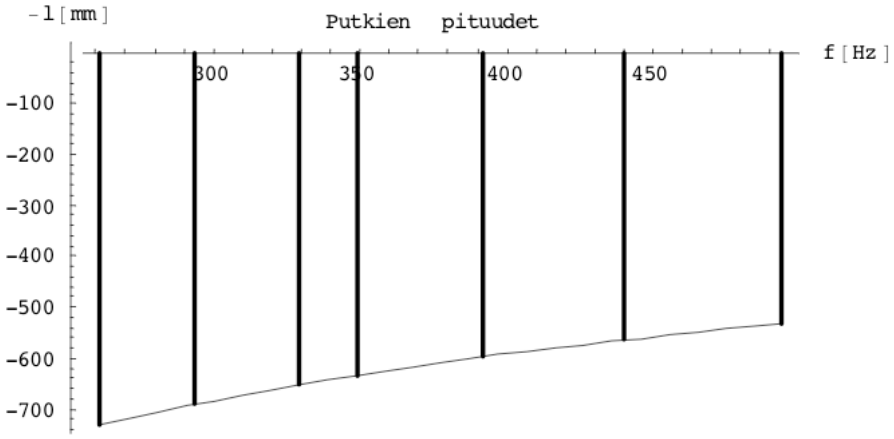
Valitaan materiaaliksi messinkiputki, jonka seinämän paksuus on $h = 10\text{mm}$ ja ulkohalkaisija on $D = 40\text{mm}$. Tällöin on sisähalkaisija $d = D - 2h = 20\text{mm}$. Poikkileikkauksen geometriasta johtuva vakio on $\sqrt{I/A} \approx 11{,}2\,\text{mm}$. Äänen nopeus messingissä on $c = \sqrt{E/\rho} = 4700\,\text{m/s}$.

Valitut värähdysluvut sekä niitä vastaavat putken pituudet kaavasta (21), kun $i = 1$, ovat seuraavassa taulukossa

Taulukko 2. Ensimmäisen värähdysluvun ja putken pituuden välinen riippuvuus

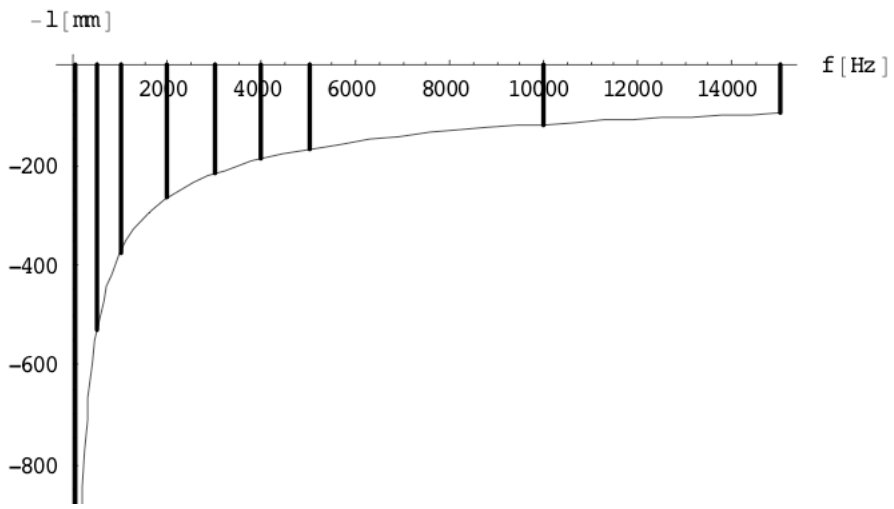
$f[\text{Hz}]$	261,6	293,7	329,6	349,2	392,0	440,0	493,9
$l[\text{mm}]$	702,1	662,6	625,5	607,7	573,5	541,3	511,0

Sama asia näkyy myös seuraavassa kuvassa



Kuva 3. *Esimerkissä lasketut putken pituudet frekvenssin funktiona.*

Normaalia kuuloaluetta 20-15000Hz vastaavat putkien pituudet nähdään seuraavassa kuvassa.



Kuva 5. *Ihmisen kuulon aluetta 20-15000Hz vastaavat esimerkin putkien pituudet.*

Kuvasta 5 nähdään miten matalat äänet vaativat pitkän putken esim. 20Hz vaatii 2539,15mm mutta 15000Hz vain 92,72mm. Korkeilla taajuuksilla erot putkien pituuksissa ovat pienet

7 LOPPUSANAT

Tässä esimerkkinä esitetyn kellopelin rakentaminen onnistuu osaavan käsissä sopivista hukkaputkista, jolloin kustannukset ovat pienet. Lopputuloksen voi virittää haluamalleen värähtelyalueelle. Liian ohutseinäisiä putkia tulee välttää, jottei niissä syntyisi ääntä häiritseviä kuorivärähtelyjä.

VIITTEET

[1] fi.wikipedia.org/wiki/Putkikellot

[2] www.acoustics.hut.fi/teaching/S-89.2300/lectures/ch13.pdf

[3] vsl.co.at/en/70/3196/3216/3217/5821.vsl

[4] Arvo Ylinen, *Kimmo- ja lujuusoppi* osat I ja II, WSOY, 1948 ja 1950