

# SIIRTOMATRIISIN LASKENTA ELEMENTTIMENETELMÄLLÄ

Jukka Tanttari<sup>1</sup>, Heikki Isoimoio<sup>1</sup>, Esa Nousiainen<sup>2</sup>, Ville Veijanen<sup>2</sup>

<sup>1</sup>VTT

PL 1300, 33101 Tampere

etunimi.sukunimi@vtt.fi

<sup>2</sup>Wärtsilä Finland Oy Power Plants

PL 252, 65101 Vaasa

etunimi.sukunimi@wartsila.com

## 1 JOHDANTO

Polttomoottorien pakomelu on yksi voimalaitosmelun merkittävimmistä komponenteista. Pakomelu saadaan riittävän alhaiselle tasolle nykyisen vaimenninteknologian avulla. Voimalaitosten ja moottorien tehon kasvaminen sekä ratkaisujen kustannustehokkuuden parantaminen kuitenkin edellyttävät pakokanava- ja äänenvaimenninratkaisujen jatkuvaa kehittämistä. Kehitystyön tärkeä osa on pakokanavien ja niiden komponenttien mallinnus- ja simulointi.

## 2 SIIRTOMATRIISIMENETELMÄ

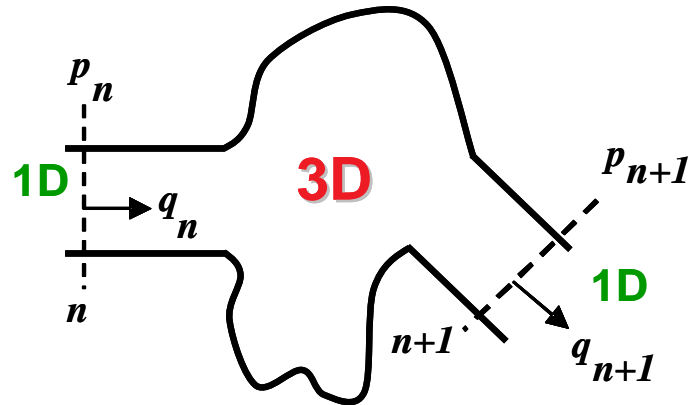
Siirtomatriisimenetelmä [1] on putkiakustiikassa käytettävä järjestelmätason laskentatyökalu. Se voidaan johtaa 1-dimensioisen Helmholtzin yhtälön ratkaisusta. Menetelmä on käyttökelpoinen lineaarisissa taajuustason tehtävissä. Tärkeitä sovellusalueita ovat äänenvaimentimet sekä pakoääni- ja ilmanvaihtokanavat. Menetelmän vahva puoli on laajojen kokonaisuuksien hallinta, edellyttäen että tarvittavat siirtomatriisit ovat käytettävissä.

Siirtomatriisi määrittelee komponentin akustiset siirto-ominaisuudet kahden valitun kohdan eli määrittelytason välillä, yhtälö 1. Matriisissa on kullakin taajuudella neljä kompleksista elementtiä. Kun tilasuureet tunnetaan komponentin ("2-portin") yhdellä puolella, voidaan tilasuureet toisella puolella laskea siirtomatriisin avulla. Tilasuureiksi valitaan tavallisesti äänenpaine  $p$  ja tilavuusnopeus  $q$ . Siirtomatriisin avulla voidaan laskea myös komponentin ääneneneristävyys (TL), yhtälö 2.

$$\begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{bmatrix} \quad (1) \quad TL = 20 \log_{10} \left| \frac{A + \frac{S}{\rho_0 c_0} B + \frac{\rho_0 c_0}{S} C + D}{2} \right| \quad (2)$$

$A$ ,  $B$ ,  $C$  ja  $D$  ovat siirtomatriisin elementit,  $S$  on putken poikkipinta-ala määrittelytasoilla,  $\rho_0$  kaasun tiheys ja  $c_0$  äänen nopeus kaasussa. Alaindeksit  $n$  ja  $n+1$  viittaavat siirtomatriisin määrittelytasoihin. Yhtälössä 2 oletetaan putken halkaisijan olevan sama molemmilla määrittelytasoilla.

Yhtälön 1 perusteella voidaan komponenttiketjuja hallita siirtomatriisien kertolaskulla. Ketjuissa voi olla komponentteja, joissa esiintyy 3-dimensioisia akustisia ilmiöitä. Tämä on sallittua, kunhan akustiikka määrittelytasoilla on 1-dimensioista, kuva 1. 3-dimensioisia ilmiöitä sisältävien komponenttien siirtomatriiseja ei yleensä kyetä ratkaisemaan analyttisesti. Tämä voidaan tehdä numeerisilla menetelmillä kuten elementtimenetelmä FEM tai reunaelementtimenetelmä BEM.



Kuva 1. Komponentin siirtomatriisin määrittelyyn liittyviä merkintöjä. Mukailtu viitteessä [2] esitetystä kuvasta.

### 3 SIIRTOMATRIISIN OMINAISUUKSISTA

Yhtälön 1 lisäksi komponentin siirtomatriisi tai sen elementit voivat erikoistapauksissa toteuttaa tiettyjä matemaattisia lisäehtoja. Lisäehdot riippuvat komponentin geometriasta sekä kaasun häviö-ominaisuuksista ja liiketilasta. Guptan [3] mukaan toisistaan riippumattomia erikoistapauksia ovat käänteinen (Reciprocal, R), symmetrinen (Symmetric, S) sekä konservatiivinen (Conservative, C) tapaus sekä näiden yhdistelmät, taulukko 1. Lisäehdot joihin taulukossa 1 viitataan, ovat:

$$\Delta = 1 \quad (3) \quad A = D \quad (4)$$

$$A^* = -A/\Delta, \quad D^* = -D/\Delta, \quad B^* = B/\Delta, \quad C^* = C/\Delta \quad (5)$$

missä  $\Delta$  on siirtomatriisin determinantti ja  $*$  on tarkoittaa elementin kompleksikonjugaattia.

Taulukko 1. Siirtomatriisin ominaisuuksia.

Nimitys	Komponentin ominaisuus	Lisäehto	Esimerkki
<u>RSC</u>	Käänteinen	3	Laajennus putkessa, häviöllinen kaasu
<u>RSC</u>	Symmetrinen (ja käänteinen)	3 ja 4	Putki, levossa oleva häviöllinen kaasu
<u>RSC</u>	Konservatiivinen	5	Putki, virtaava häviötön kaasu
<u>RSC</u>	Käänteinen ja konservatiivinen	3 ja 5	Laajennus putkessa, häviötön kaasu
<u>RSC</u>	Käänteinen, symmetrinen ja konservatiivinen	3,4 ja 5	Putki, levossa oleva häviötön kaasu
<u>RSC</u>	Yleinen tapaus	-	Putki, virtaava häviöllinen kaasu

Siirtomatriisin numeerista laskentaa on mahdollista yksinkertaistaa hyödyntämällä em. lisäehtoja. Koska ehdot riippuvat järjestelmän fysiikasta, tulisi järjestelmä voida etukäteen tunnistaa tietyn tyyppiseksi. Andersen [4] on hyödyntänyt yhtälöiden 3 ja 4 mukaisia lisäehtoja siirtomatriisin FEM-laskennassa. Lisäehtojen avulla siirtomatriisi voidaan määrittää numeerisen mallin yhdestä ratkaisusta, jossa käytetään kaiutonta reunaehto tasolla  $n+1$ . Osa Andersenin tarkastelemista tapauksista on geometrisesti epäsymmetrisiä ja osassa käytetään virtausta, jolloin järjestelmä ei ole käänteinen. Siitä huolimatta tulokset vaikuttavat hyviltä.

#### 4 KAHDEN NUMEERISEN RATKAISUN LASKENTA TEKNIikka

Siirtomatriisin laskennallisessa ratkaisemisessa voidaan lähteä matriisin määritelmästä [1]. Tämä tapa edellyttää mallin ratkaisemista tason  $n+1$  kaksilla eri reunaehdoilla. Menettely on seuraava. Asetetaan tasolle  $n$  tilavuusnopeus  $q_n$  ja tasolle  $n+1$  jäykkä reunaehto  $q_{n+1} = 0$ . Tällöin elementit  $B$  ja  $D$  eliminoituvat,  $q_n$  on annettu ja elementit  $A$  ja  $C$  voidaan ratkaista:

$$A = \frac{p_n}{p_{n+1}} \quad (6) \quad C = \frac{q_n}{p_{n+1}} \quad (7)$$

Toisessa vaiheessa mallia muutetaan niin, että tasolle  $n+1$  asetetaan vapaa (pressure release) reunaehto  $p_{n+1} = 0$ . Nyt elementit  $A$  ja  $C$  eliminoituvat ja  $B$  ja  $D$  voidaan ratkaista:

$$B = \frac{p_n}{q_{n+1}} \quad (8) \quad D = \frac{q_n}{q_{n+1}} \quad (9)$$

Joissakin laskentaohjelmissa kuten VA One -ohjelmiston akustinen FEM-moduli täysin vapaa reunaehto ei ole sallittu. Tässä tapauksessa voidaan käyttää tasolle  $n+1$  asetettavaa impedanssireunaehto  $p_{n+1} / q_{n+1} = Z_{n+1}$ . Nyt elementit  $B$  ja  $D$  saadaan yhtälöistä

$$B = \frac{p_n - A p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n - A p_{n+1}}{p_{n+1} / Z_{n+1}} \quad (10) \quad D = \frac{q_n - C p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{q_n - C p_{n+1}}{p_{n+1} / Z_{n+1}} \quad (11)$$

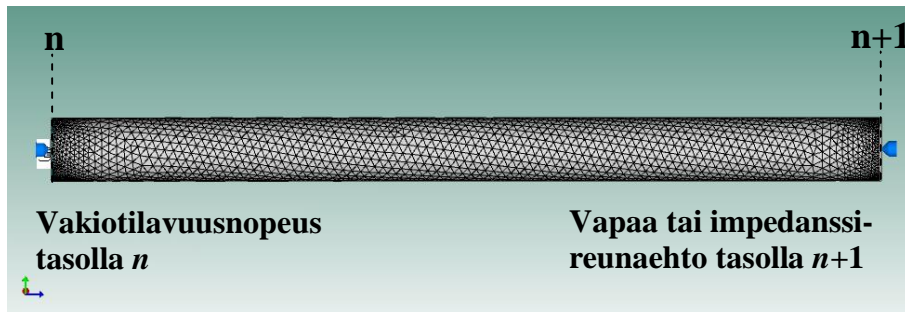
Elementit  $A$  ja  $C$  eivät eliminoidu, joten ne on laskettava ensin ja sijoitettava sitten yhtälöihin 10 ja 11. Tämä tapa on herkempi virheille, koska siihen kumuloituvat elementtien  $A$  ja  $C$  virheet ja lisäksi  $q_{n+1}$  lasketaan epäsuorasti, impedanssireunaehdon avulla. Reunaehdon tulee poiketa mahdollisimman paljon jäykästä reunaehdosta, mutta myös hyvin pieni impedanssi aiheuttaa ongelmia, koska impedanssin pienentyessä lausekkeiden 10 ja 11 nimittäjä lähestyy arvoa  $0/0$ . Käytännön kokemuksen perusteella impedanssi jonka reaaliosa on  $0$  ja imaginaariosa noin  $1i \dots 50i$  kg/m<sup>2</sup>s tuottaa käyttökelpoisia tuloksia.

#### 5 LASKENTAESIMERKKEJÄ

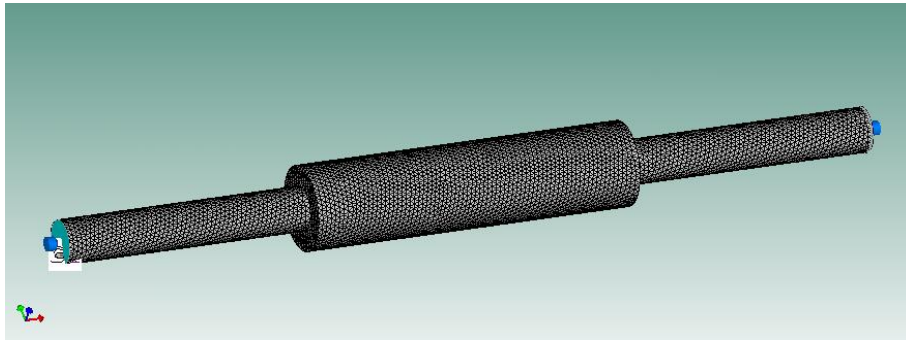
Siirtomatriisin laskennan validointiin voidaan käyttää tapauksia, joiden siirtomatriisit ovat analyttisesti tunnettuja. Näitä ovat mm. suora putki ja yksinkertainen kammio. Matriisin elementtien tarkastelu on hyödyllistä, mutta ei kovin tarkoituksenmukaista tämän esityksen puitteissa. Yhtälön 2 avulla laskettu ääneneristävyys (TL) on tärkeä komponenttisuure. Se on myös herkkä indikaattori laskennan toimivuudelle, vaikka se ei riittävä ehto siirtomatriisin oikeellisuudelle olekaan.

Suoran putken TL on 0 dB, kun kaasu on häviötön. Kuvassa 2 on suoran putken siirtomatriisin laskenta-asetelma ja putken malli. Ellei toisin mainita, on pääkanavan halkaisija esimerkeissä 1100 mm, kaasu häviötöntä ilmaa ja äänen nopeus 343 m/s. Akustisia elementtejä (TETRA4) on käytetty tyypillisesti yli 20 akustista aallonpituutta kohti.

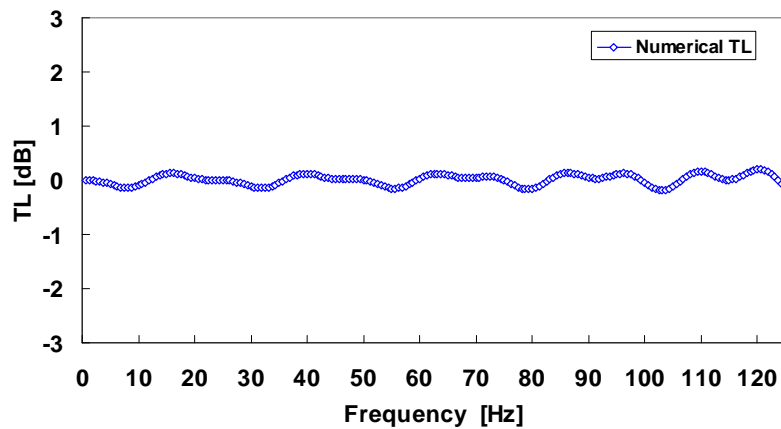
Kuvassa 3 on yksinkertaisen kammion malli. Laskennassa pyritään varmistamaan tasoalto-olosuhteet käyttämällä muutaman halkaisijan pituisia putkia ennen ja jälkeen varsinaisen komponentin. Suoran putken ja kammion TL on esitetty kuvassa 4 ja 5.



Kuva 2. Suora putki,  $L=14400$  mm, ja siirtomatriisin laskenta-asetelma.



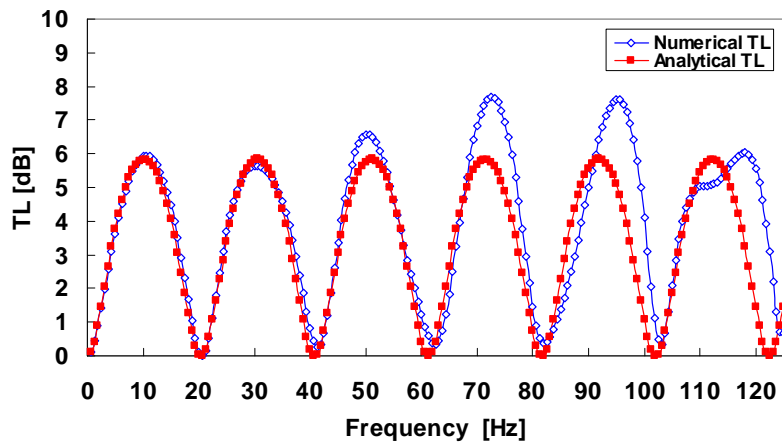
Kuva 3. Pitkä kammio, kammion  $\phi=2100$  mm,  $L=8400$  mm.



Kuva 4. Suoran putken numeerinen TL.

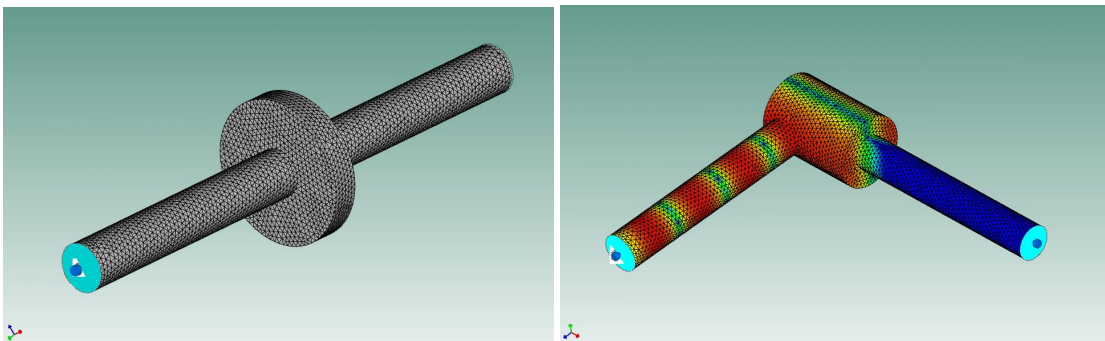
Suoran putken tapauksessa TL aaltoilee  $\pm 0,3$  dB teoreettisen arvon 0 dB ympärillä. Kuvan 3 pitkän kammion TL noudattelee aluksi analyttistä, tasoaltoteorian mukaista ratkaisua, mutta poikkeaa siitä selvästi suuremmilla taajuuksilla. Poikkeamat johtuvat pääasiassa korkeampien aaltomuotojen vaikutuksesta. Kammion ensimmäisen korkeamman aaltomuodon kytkentätaajuus on noin 95 Hz.

Korkeammat aaltomuodot voivat kytkeä energiaa komponenttien yli myös aaltomuotojen kytkentätaajuuden alapuolella. Kun kammiota lyhennetään, kasvaa korkeampien aaltomuotojen merkitys. Kammion pituuden ollessa alle 40 % sen halkaisijasta ei tasoaltoteoriolla saada edes likimäärin tyydyttäviä tuloksia [5]. Kuvassa 6a on lyhyt kammio ja kuvassa 7 sen TL. Lyhyt kammio toimii akustisesti samalla tavalla kuin neljännesaaltoputki.

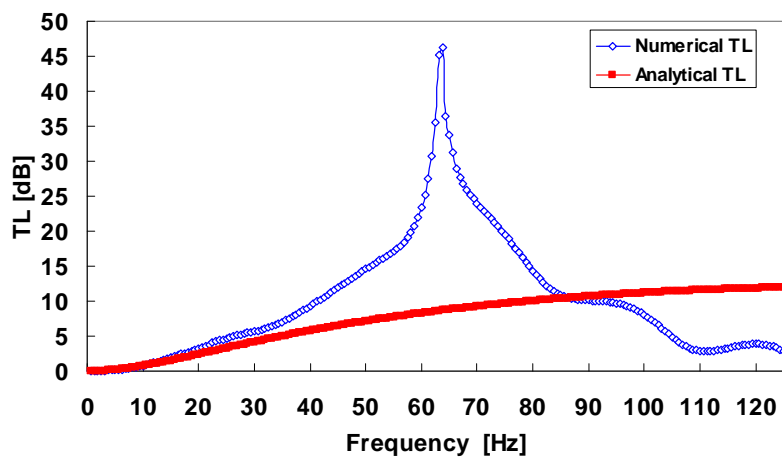


Kuva 5. Pitkän kammion numeerinen ja analyttinen TL.

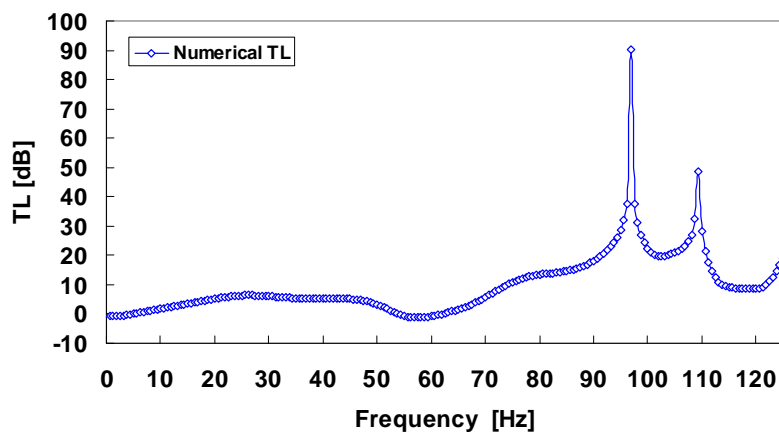
Korkeampia eteneviä aaltomuotoja voidaan tietoisesti hyödyntää vaimentimen suunnittelussa. Kuvassa 6b on sivusta sisään - päästä ulos tyyppinen kammio. Kammion sivulle sijoitettu tuloputki herättää voimakkaasti ensimmäisen korkeamman etenevän aaltomuodon. Tämä aaltomuoto ei geometrisista syistä kykene siirtämään energiaa tehokkaasti lähtöputkeen. TL-käyrässä, kuva 8, havaitaan kaksi korkeaa maksimia. Maksimit esiintyvät ensimmäiseen korkeampaan etenevään aaltomuotoon liittyvillä kammion ominaistajuuksilla.



Kuva 6. a) Lyhyt kammio ( $\phi = 3300$  mm,  $L = 600$  mm)  
ja b) sivusta sisään - päästä ulos -kammio ( $\phi = 2100$  mm,  $L = 3000$  mm).



Kuva 7. Lyhyen kammion numeerinen ja analyttinen TL.



Kuva 8. Sivusta sisään - päästä ulos -kammion numeerinen TL.

## 6 YHTEENVETO

Akustista elementtimenetelmää voidaan käyttää geometrialtaan monimutkaisten komponenttien siirtomatriisien laskentaan. Poikkipinnan äkillisiin geometrisiin muutoksiin liittyy 3-dimensioisia ilmiöitä, joilla on merkitystä myös korkeampien aaltomuotojen kytkentäaajuuksien alapuolella [6]. Numeerinen laskenta paljastaa tasoaalto-oletuksen tuottamia virheitä jo varsin yksinkertaisissa tapauksissa.

Laskennassa on kehittämistarpeita. Pakokaasun lämpötilan ja tiheyden vaihtelun alue tunnetaan voimalaitossovelluksissa tarkasti. Eräs kehityskohde on em. vaihtelun tuoman mitoitusriskin huomioiminen erityisesti kapeakaistaisilla vaimenninkomponenteilla. Laskennan kannalta ongelmallisia tapauksia ovat myös komponentit joissa on suuria lämpötilagradientteja. Akustishearähteen mekaanisen värähtelyn vaikutus komponentin akustiseen toimintaan voidaan ja on syytä tarkistaa kytketyillä vibroakustisilla malleilla. Muita kehittämiskohteita ovat mm. virtauksen ja häviöiden huomioiminen sekä siirtomatriisien yhteensopivuuden varmistaminen toisiinsa ohjelmiin siirrettyinä. Virtaus pakokanavassa on täysin turbulentsia, joten sen vaikutusta akustiikkaan ei liene mahdollista huomioida yksinkertaisilla korjauskertoimilla.

## VIIITTEET

1. MUNJAL, M L, *Acoustics of ducts and mufflers*. John Wiley & Sons, 1987.
2. ÅBOM, M. Theory. Lecture notes, *MWL/KTH workshop on "Muffler design for IC-engine applications"* October 20, 2005. <http://www.ave.kth.se/divisions/mwl/index.html>.
3. GUPTA, V H, On independence of reciprocity, symmetry and conservativeness of one-dimensional linear systems. *J. Sound Vib.* 179(1995)3, 547–552.
4. ANDERSEN K S, Analyzing muffler performance using the transfer matrix method. *Proceedings of the COMSOL Conference 2008*. Hannover.
5. SELAMET, A. & RADAVIDICH, P.M. The effect of length on the acoustic attenuation performance of concentric expansion chamber: An analytical, computational and experimental investigation. *J. Sound Vib.* 201(1997)4, 407-426.
6. PETYT, M. & JONES, C.J.C. Numerical methods in acoustics. In Fahy, F. & Walker, J. (eds.), *Advanced Applications in Acoustics, Noise and Vibration*. Spoon Press 2004. 640 p. Chapter 2.