

EPÄJATKUVA GALERKININ MENETELMÄ ELASTISELLE AALTOYHTÄLÖLLE

Timo Lähivaara^{a,*}, Tomi Huttunen^{a,b}

^aKuopion yliopisto, Fysiikan laitos, PL 1627, 70211 Kuopio

^bKuava Oy, PL 1188, 70211 Kuopio

*timo.lahivaara@uku.fi

1 JOHDANTO

Useilla fysiikan osa-alueilla on keskeistä tutkia äänen etenemistä elastisessa väliaineessa. Näitä tutkimuskohteita ovat esimerkiksi ultraäänen eteneminen ihmisen luissa tai auton rungon värähtelyt. Viime vuosikymmenten aikana useita numeerisia menetelmiä on esitetty edellä mainittujen ongelmien ratkaisemiseksi. Esimerkkeinä käytetyistä menetelmistä mainittakoon differenssi-, äärellisten elementtien- ja sädemenetelmä. Kuitenkin valitettavan usein (varsinkin korkeilla taajuuksilla ja monimutkaisissa geometrioissa) perinteiset lähestymistavat tuottavat liian epätarkkoja ratkaisuja tutkittaville ongelmille.

Yksi lupaava lähetysmistapa tutkimaan aaltoilmiöitä elastisessa väliaineessa on epäjatkuva Galerkinin menetelmä (*eng. discontinuous Galerkin (DG) method*). Tässä työssä DG menetelmää käytetään paikkaderivaattojen ja Crank-Nicolson (CN) menetelmää aikaderivaattojen laskentaan. Käytetyssä mallissa polynomikannan asteluku valitaan erikseen jokaiselle laskentahilan elementille. Kantafunktioiden asteluvun valintakriteerin tavoitteena on tuottaa ratkaisulle vakiosuuruinen virhetaso riippumatta käytetystä hilasta.

2 ELASTINEN AALTOYHTÄLÖ (3D)

Elastinen aaltoyhtälö isotrooppiselle väliaineelle voidaan kirjoittaa lineaarisena hyperbolisena systeeminä [1, 2, 3]

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} + \sum_{\ell=1}^3 A_{\ell} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x_{\ell}} = \bar{f}, \quad (1)$$

missä $\bar{\tau} = (\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}, u_1, u_2, u_3)^{\top}$ (\top tarkoittaa transpoosia). Systeemissä (1) t on aika, x_{ℓ} paikka, τ_{11}, τ_{22} ja τ_{33} ovat jännityksen normaalit komponentit, τ_{12}, τ_{23} ja τ_{13} ovat jännityksen pinnansuuntaiset komponentit, u_1, u_2 ja u_3 nopeuskomponentit ja \bar{f} tilavuuslähde.

Hyperbolisessa systeemissä (1) matriisit A_ℓ , $\ell = 1, 2, 3$ ovat kooltaan 9×9 . Esimerkkinä tarkastellaan matriisin A_1 nollasta poikkeavia arvoja, jotka ovat

$$\begin{aligned} A_1(2, 7) = A_1(3, 7) = -\lambda, & \quad A_1(1, 7) = -(\lambda + 2\mu), \\ A_1(4, 8) = A_1(7, 9) = -\mu, & \quad A_1(7, 1) = A_1(8, 4) = A_1(9, 5) = -\rho^{-1}, \end{aligned}$$

missä λ ja μ ovat Lamé vakioita ja ρ on väliaineen tiheys. Matriisit A_2 ja A_3 sisältävät samat nollasta poikkeavat arvot, mutta eri paikoissa [1, 3]. Edelleen P - ja S -aaltojen nopeudet voidaan esittää Lamé vakioiden ja väliaineen tiheyden avulla seuraavasti

$$c_p = \sqrt{\rho^{-1}(\lambda + 2\mu)} \quad \text{ja} \quad c_s = \sqrt{\rho^{-1}\mu}. \quad (2)$$

Elastiselle aaltoyhtälölle voidaan kirjoittaa laaja määrä erilaisia reunaehtoja ja edelleen reunaehdoille on lukuisia tulkintoja. Kattavampi yleiskatsaus aaltoilmiöistä elastisessa väliaineessa ja näiden ilmiöiden fysikaalisista ominaisuuksista on esitetty lähteessä [1].

3 EPÄJATKUVA GALERKININ MENETELMÄ

DG menetelmä julkaistiin ensimmäisen kerran vuonna 1973 approksimoimaan neutronien kulkeutumista kuvaavaa yhtälöä [4]. Alkuperäisen julkaisun jälkeen DG menetelmän käyttö on yleistynyt huomattavasti ja näin ollen sen käytöstä on olemassa useita satoja tieteellisiä julkaisuja. Nykyisin DG lähestymistapaa on sovellettu useille fysiikan osa-alueille, joista esimerkkeinä mainittakoon sähkömagnetiikka [5], virtauslaskenta [6] ja elastiikka/akustiikka [7, 3].

DG menetelmän käyttöön liittyy merkittäviä etuja perinteisiin laskentamalleihin verrattuna. Esimerkkeinä mainittakoon erityinen matriisirakenne, jonka johdosta muistin tarvetta laskennassa on pystytty ratkaisevasti vähentämään. Toisaalta menetelmä on helppo rinnakaistaa, joka on edellytys suurten ongelmien tehokkaassa mallinnuksessa.

4 NUMEERISET ESIMERKIT

Seuraavissa kappaleissa tarkastellaan elastisen aaltoyhtälön numeerisia ratkaisuja 2D ja 3D ongelmissa. Esimerkkien tavoitteena on havainnollistaa käytetyn DG menetelmän etuja matemaattisessa mallinnuksessa.

Työssä tarkastellaan ajansuhteen riippuvia ratkaisuja, joten tulee aika-askeleen pituus kiinnittää käyttäen Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) lukua. CFL luku voidaan kirjoittaa yhtälömuodossa seuraavasti

$$\text{CFL} = \delta_t \max\{c_{s,p}\} h_{\min}^{-1}, \quad (3)$$

missä δ_t on aika-askeleen pituus, $\max\{c_{s,p}\}$ on suurin esimerkissä käytetty aallonnopeus ja h_{\min} on pienin etäisyys kahden solmun välillä laskentahilassa. Kaikissa tutkitavissa ongelmissa CFL luku asetetaan arvoon 0.02, jonka tavoitteena on minimoida aikaintegroinnista syntyvä virhe.

Laskennassa käytetty DG ratkaisija on kirjoitettu C++ ohjelmointikielellä ja rinnakkaisitettu käyttäen MPI ympäristöä. Laskennan 2D esimerkit on laskettu käyttäen normaalia toimisto PC:tä ja suurempi 3D simulaatio CSC:n *louhi*-supertietokoneella.

4.1 Aallon eteneminen maankuoressa

Ensimmäisenä esimerkkinä tutkitaan elastisen värähtelypulssin etenemistä maankuoressa. Tutkittavan ongelman geometria Ω voidaan esittää muodossa

$$\Omega = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 4700, 0 \leq x_2 \leq f_1(x_1) \},$$

missä $f_1(x_1) = 0.1763x_1 + 2000$. Ongelman geometrian voi nähdä kuvassa 1(a), jossa on esitetty laskennassa käytetty hila. Samantyyppistä esimerkkiongelmää on tutkittu esimerkiksi lähteissä [2, 8].

Mallinnusongelmalle asetetaan reunaehdot siten, että vasen-, oikea- ja alalaita sisältää absorpoivan reunaehdon ja edelleen kalteva taso ($\theta = \pi/18$ rad) homogeenisen vapaa-tuenta reunaehdon (eng. *traction-free boundary condition*). Reunaehdot on tarkemmin käsitelty viitteissä [1, 2]. Fysikaaliset parametrit elastiselle aaltoyhtälölle valitaan siten, että P -aallon nopeus $c_p = 3200$ m/s, vastaavasti S -aallon nopeus $c_s = 1847.5$ m/s ja lopuksi tiheys $\rho = 2200$ kg/m³.

Esimerkissä käytetään lähteenä värähtelypulssia, joka tuotetaan tilavuuslähteenä [2]

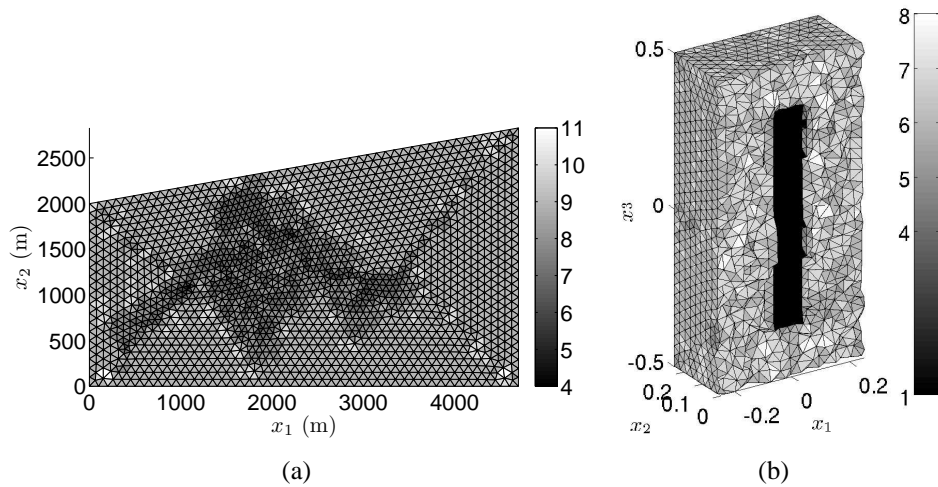
$$\bar{f}(\mathbf{x}, t) = (0 \ 0 \ 0 \ -\sin(\theta) \ \cos(\theta))^\top \cdot g(t) \cdot \delta(\bar{x} - \bar{x}_s) \cdot \rho^{-1}, \quad (4)$$

missä $\delta(\cdot)$ tarkoittaa Diracin deltafunktiota ja funktio g määritellään (*Ricker wavelet*)

$$g(t) = a_1 (0.5 + a_2 (t - t_0)^2) \exp(a_2 (t - t_0)^2) \quad \forall t, \quad (5)$$

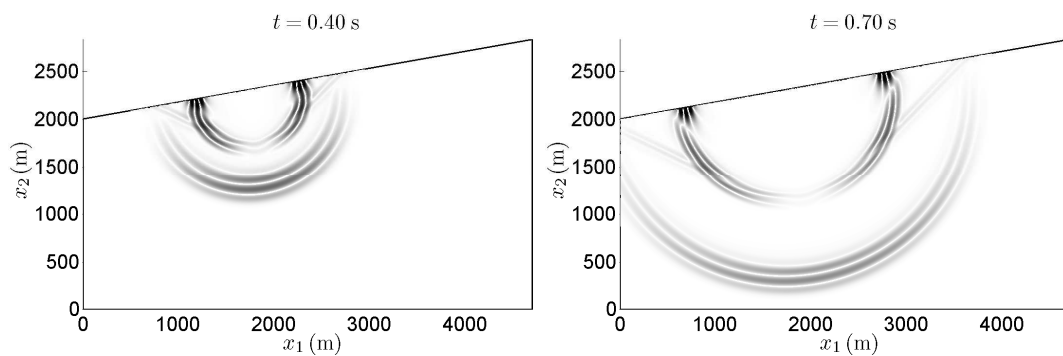
missä $a_1 = -2000$ kg/(ms)², $a_2 = -(\pi f_c)^2$ ja $t_0 = 0.08$ s. Laskennassa asetetaan keskitaajuudeksi $f_c = 14.5$ Hz ja lähdepisteeksi $\bar{x}_s = (1725.18 \text{ m}, 2273.73 \text{ m})$.

Kuvassa 1(a) on esitetty laskennassa käytetty laskentaverkko. Kuvassa värisävyjakouma näyttää polynomi kantafunktioiden asteluvun jokaiselle elementille. Kuvan 1(a) hila sisältää yhteensä 3589 elementtiä, 1868 laskentasolmua, $h_{\min} = 39.617$ m ja $h_{\max} = 114.937$ m (h_{\max} on suurin etäisyys kahden solmun välillä laskentahilassa). Kantafunktioiden asteluvut on määrätty artikkelissa [8] esitettyjä tuloksia käyttäen vaaditulle virheelle 0.25%.



Kuva 1: Työssä tutkittujen mallinnusongelmien laskentahilat. Kuvissa esitetty värisävyjakauma kertoo elementin kantafunktion asteluvun.

Kuvassa 2 on esitetty kahdella ajanhetkellä vertikaalinen nopeuskomponentti $|u_2|$. Ajanhetkistä ensimmäisestä $t_1 = 0.4$ s havaitaan kuinka pistelähde on kokonaan tuottanut tulevan kentän. Toisaalta ensimmäisestä ajanhetkestä voidaan havaita, kuinka esimerkiksi voimakas pinta-aalto syntyy kaltevalle pinnalle. Toisella ajanhetkellä $t_2 = 0.7$ s P -aalto on edennyt geometrian vasempaan laitaan ja edelleen havaitaan että pinta-aallon amplitudi ei laske alkuperäisestä.



Kuva 2: Vertikaalinen nopeuskomponentti $|u_2|$ kahdella ajanhetkellä. Tutkittava ajanhetki on esitetty kuvien otsikossa.

4.2 Palkin värähtely

Toisessa esimerkissä tarkastellaan värähtelyn etenemistä epähomogeenisessa väliaineessa. Kyseessä olevaa mallinnusongelmaa on tarkasteltu lähteessä [3]. Esimerkin geometria Ω koostuu kahdesta osasta (kts. kuva 1(b)), jotka on määritelty seuraavasti

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |x_3| \leq 0.35, |x_1| + |x_2| \leq 0.05 \}, \\ \Omega_2 &= \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |x_3| \leq 0.5, |x_1| + |x_2| \leq 0.25 \} \setminus \Omega_1.\end{aligned}$$

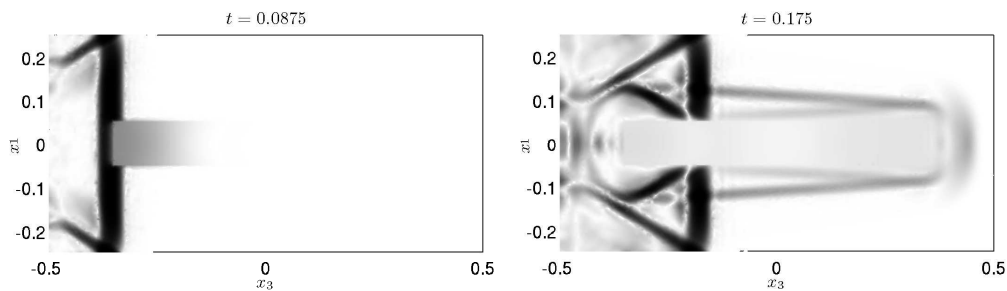
Ongelman reunaehdot asetetaan siten, että pinta $x_3 = -0.5$ sisältää epähomogeenisen vapaa-tuenta reunaehdon, pinnalle $x_3 = 0.5$ asetetaan absorpoiva reunaehto ja kaikille muille geometrian ulkoreunoilla homogeeninen vapaa-tuenta reunaehto. Lähdefunktiona epähomogeeniselle vapaa-tuenta pinnalle käytetään

$$\bar{g}(t) = \begin{cases} \sin(\omega t) & \text{jos } t \in [0, \frac{\pi}{\omega}] \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}, \quad (6)$$

missä kulmataajuus $\omega = 30\pi$. Esimerkissä systeemin (1) fysikaaliset parametrit on asetettu seuraavasti; S -aallon nopeus $(c_{s_1}, c_{s_2}) = (10, 1)$, P -aallon nopeus $(c_{p_1}, c_{p_2}) = (20, 2)$ ja tiheys $(\rho_1, \rho_2) = (1, 1)$.

Kuvassa 1(b) on esitetty laskennassa käytetty tetraedriverkko. Kuvan värisävyjakauma näyttää kantafunktion asteluvun jokaiselle elementille. Hila sisältää 49786 elementtiä, 9683 solmua, $h_{\min} = 0.0182$ ja $h_{\max} = 0.0630$. Kantafunktioiden asteluku on valittu kiinnittäen virheen arvoon 0.25% [9].

Kuvassa 3 on esitetty nopeuskomponentti $|u_3|$ kahdella ajanhetkellä $t_1 = 0.0875$ ja $t_2 = 0.175$. Ajanhetkistä ensimmäinen $t_1 = 0.0875$ havainnollistaa tilannetta, jossa reunalta $x_3 = -0.5$ tuotettu lähde on edennyt värähtelevän palkin reunalle. Edelleen ajanhetki $t_2 = 0.175$ on valittu siten, että se havainnollistaa palkissa syntyviä värähtelyjä.



Kuva 3: Nopeuskomponentti $|u_3|$ kahdella ajanhetkellä $t_1 = 0.0875$ (vasen) ja $t_2 = 0.175$ (oikea).

5 POHDINTA

Työssä elastinen aaltoyhtälö ratkaistiin käyttäen DG menetelmää paikkaderivaattojen ja CN menetelmää aikaderivaattojen approksimointiin. Tulosten perusteella voidaan havaita, että käytössä oleva kantafunktioiden asteluvun valintakriteeri toimii odotetusti.

VIITTEET

- [1] LEVEQUE R J, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, 2002.
- [2] KÄSER M & DUMBSER M, An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - I. the two-dimensional isotropic case with external source terms, *Geophysical Journal International*, **166**(2006) 23, 855–877.
- [3] DUMBSER M & KÄSER M, An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - II. the three-dimensional isotropic case, *Geophysical Journal International*, **167**(2006), 319–336.
- [4] REED W & HILL T, Triangular mesh methods for the neutron transport equation, LA-UR-73-479, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico, USA, 1973.
- [5] HESTHAVEN J S & WARBURTON T, Nodal high-order methods on unstructured grids I. time-domain solution of Maxwell's equations, *Journal of Computational Physics*, **181**(2002), 186–221.
- [6] KLAIJ C M, VAN DER VEGT J J Q, & VAN DER VEN H, Space-time discontinuous Galerkin method for the compressible Navier-Stokes equations, *Journal of Computational Physics*, **217**(2006), 589 – 611.
- [7] LÄHIVAARA T, MALINEN M, KAIPIO J P, & HUTTUNEN T, Computational aspects of the discontinuous Galerkin method for the wave equation, *Journal of Computational Acoustics*, **16**(2008), 507–530.
- [8] LÄHIVAARA T & HUTTUNEN T, Optimal basis order for the discontinuous Galerkin method of the acoustic and elastic wave equations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (2008), submitted.
- [9] LÄHIVAARA T & HUTTUNEN T, Optimal basis order for the discontinuous Galerkin method of the 3D dissipative wave equation with perfectly matched layer, *Journal of Computational Physics*, (2009), submitted.