

# **PUTKIJÄRJESTELMÄSSÄ ETENEVÄN PAINEVAIHTELUN MALLINNUS HYBRIDIMENETELMÄLLÄ**

**Erkki Heikkola**

Numerola Oy  
PL 126, 40101 Jyväskylä  
erkki.heikkola@numerola.fi

## **1 JOHDANTO**

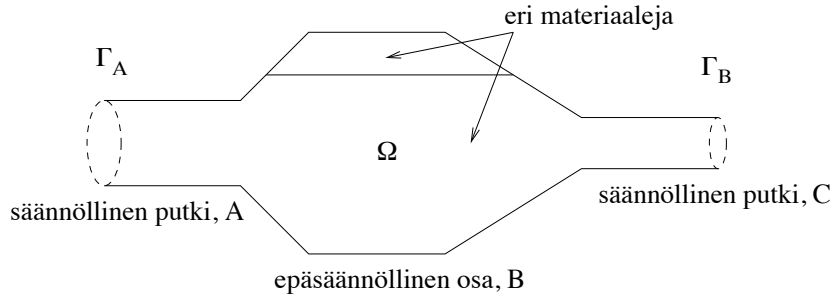
Työssä tarkastellaan putkijärjestelmässä etenevän akustisen painevaihtelun numeerista mallintamista. Putkijärjestelmän oletetaan koostuvan suorista säännöllisen muotoisista osista, joiden välissä on epäsäännöllisen muotoinen komponentti. Säännöllisissä ja tasaisen muotoisissa putkissa etenevä akustinen aalto voidaan esittää aaltomuotoisten kantafunktioiden avulla, mutta vastaava esitys ei ole käytettävissä epäsäännöllisessä osassa. Painevaihtelun numeeriseen mallinnukseen käytetään hybridimenetelmää, jossa putkiston epäsäännöllisessä osassa ratkaistaan akustinen aaltoyhtälö elementtimenetelmällä. Aaltoyhtälön ratkaisu on kytketty säännöllisissä osissa käytettäviin kantafunktioesityksiin. Käytettävä menetelmä on esitetty artikkelissa [1], ja se perustuu artikkelissa [2] esitettyyn mode matching -tekniikkaan.

Elementtimenetelmä on joustava geometrian muotojen ja materiaalimuutosten suhteen, joten hybridimenetelmän avulla voidaan simuloida luotettavasti monimutkaisten komponenttien ja vaihtuvien materiaaliparametrien vaikutusta painevaihtelun etenemiseen. Putkiston epäsäännöllisten osien on usein tarkoitus vaimentaa putkistossa etenevää haitallista painevaihtelua. Artikkelissa esiteltävällä menetelmällä saadaan suoraviivaisesti arvioitua epäsäännöllisen osan aiheuttama vaimennus painevaihtelussa. Numeeristen simulointien perusteella voidaan vaimentimen mitoituksia parantaa haluttujen ominaisuuksien saavuttamiseksi.

Putkessa etenevän virtauksen vaikutus painevaihtelun etenemiseen olisi myös mahdollista huomioida menetelmässä, mutta tätä ei ole toteutettu tämän työn yhteydessä. Hybridimenetelmä on toteutettu Numerola Oy:n omalla Numerrin-mallinnuskielellä, joka on suunniteltu erityisesti osittaisdifferentiaaliyhtälöihin perustuvien mallien ja simulaattoreiden kehitystyöhön.

## **2 HYBRIDIMENETELMÄN MATEMAATTINEN ESITYS**

Putkijärjestelmissä on usein pitkiä säännöllisen muotoisia osia, joiden välissä on lyhyitä poikkipinta-alan muutoksia tai materiaalien muutoksia. Kuvassa 1 on havainnollistettu tarkasteltavaa tilannetta ja määritelty esitykseen liittyviä merkintöjä. Artikkelissa käsiteltävällä hybridimenetelmällä voidaan mallintaa akustisen paineaallon etenemistä tämäntyyppisissä systeemeissä.



Kuva 1: Kaaviokuva putkijärjestelmän epäsäännöllisestä osasta.

Akustisen paineaallon etenemistä voidaan mallintaa akustisella aaltoyhtälöllä

$$\frac{1}{c_q^2} \frac{\partial^2 p_q}{\partial t^2} - \nabla^2 p_q = 0, \quad (1)$$

missä  $c_q$  on äänen nopeus ja  $p_q$  akustinen paine alueessa  $q = A, B, C$ . Äänen nopeuden oletetaan olevan vakio putkissa A ja C, mutta alueessa B nopeus voi vaihdella eri osa-alueissa (esim. ilmaa ja vettä). Yhtälö ratkaistaan putkiston eri osissa eri tavoin, ja ratkaisut kytketään toisiinsa rajapinnoilla  $\Gamma_A$  ja  $\Gamma_B$ . Painevaihtelun oletetaan etenevän putkessa A, kohtaavan epäsäännöllisen osan B ja etenevän edelleen osaan C. Esityksen selkeyden vuoksi säännöllisten putkien oletetaan olevan koordinaattiakselin  $x$  suuntaisia.

## 2.1 Kantafunktiot putkiston säännöllisissä osissa

Putkiston säännöllisissä osissa poikkileikkaus pysyy vakiona, mutta voi olla erilainen putkissa A ja C. Menetelmä ei rajoitu vain tietynmuotoisiin putkiin, vaan poikkileikkaus voi olla lähes mielivaltainen. Kun oletetaan harmoninen aikariippuvuus  $e^{i\omega t}$ , aaltoyhtälön (1) ratkaisu putkiston osissa A ja C voidaan esittää muodoissa

$$p_A(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \phi_n(y, z) e^{-i\lambda_n x} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \phi_n(y, z) e^{i\lambda_n x} \quad (2)$$

ja

$$p_C(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \psi_n(y, z) e^{-i\gamma_n x} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \psi_n(y, z) e^{i\gamma_n x}. \quad (3)$$

Tässä  $F_n, A_n, B_n$  ja  $C_n$  ovat kantafunktioiden kertoimia sekä  $\lambda_n$  ja  $\gamma_n$  aaltolukuja alueissa A ja C. Funktiot  $\phi_n$  ja  $\psi_n$  ovat säännöllisten putkien poikkileikkauksia vastaavia ominaisfunktioita. Joissakin erikoistapauksissa ominaisfunktiot ja niitä vastaavat aaltoluvut voidaan esittää tarkassa muodossa. Esimerkiksi pyöreässä putkessa ne voidaan esittää Besselin funktioiden avulla. Yleisessä tilanteessa ne pitää kuitenkin ratkaista numeerisesti ominaisarvotehtävän kautta [1, 3].

Tietyllä taajuudella ainoastaan äärellisen monta kantafunktiota on ns. eteneviä aaltomuotoja. Loput vaimenevat eksponentiaalisesti etäisyyden funktiona ja voidaan jättää pois tarkastelusta, jolloin niitä vastaavat kertoimet asetetaan nolliksi. Edellä olevissa

summalausekkeissa on siis käytännössä äärellinen määrä termejä. Kertoimet  $F_n$  vastaavat putkessa A etenevää tunnettua painevaihtelua, joka kohtaa epäsäännöllisen osan B. Kertoimet  $A_n$  vastaavat rajapinnalta  $\Gamma_A$  takaisin putkeen A heijastuvaa painevaihtelua, ja ne saadaan muodostettavan yhtälöryhmän ratkaisuna. Menetelmän tuloksena saadaan myös kertoimet  $B_n$ , jotka vastaavat putkeen C etenevää painevaihtelua. Kertoimien  $C_n$  oletetaan olevan nollia, mikä tarkoittaa, että rajapinnalla  $\Gamma_B$  on täydellinen heijastamaton reunaehto.

## 2.2 Helmholtzin yhtälö putkiston epäsäännöllisessä osassa

Epäsäännöllisessä osassa B esitetään aluksi aikaharmonisen aaltoyhtälön (Helmholtz) heikko formulointi seuraavilla reunaehdoilla

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_B}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{\partial p_A}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{reunalla } \Gamma_A, \\ \frac{\partial p_B}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{\partial p_C}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{reunalla } \Gamma_B, \\ \frac{\partial p_B}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \quad \text{muilla reunoilla (sound-hard),} \end{aligned} \quad (4)$$

missä  $\mathbf{n}$  on alueesta B ulos osoittava normaalivektori. Formulointi muodostetaan kertomalla Helmholtzin yhtälö testifunktiolla  $v \in H^1(B)$ , integroimalla alueen B yli ja soveltamalla Greenin kaavaa. Kun huomioidaan edellä olevat reunaehdot, saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} \int_B (\nabla p_B \cdot \nabla v - k_B^2 p_B v) dx - \int_{\Gamma_A} \sum_n i\lambda_n F_n \phi_n v ds + \int_{\Gamma_A} \sum_n i\lambda_n A_n \phi_n v ds \\ + \int_{\Gamma_B} \sum_n i\gamma_n B_n \psi_n v ds = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

akustiselle paineelle  $p_B$ , missä  $k_B = \frac{\omega}{c_B}$ .

Lisäksi asetetaan akustisen paineen jatkuvuusehdot reunoilla  $\Gamma_A$  ja  $\Gamma_B$ . Reunalla  $\Gamma_A$  jatkuvuusehto  $p_B - p_A = 0$  kerrotaan putken A etenevällä aaltomuodolla  $\phi_m$  ja integroidaan saatu lauseke reunan  $\Gamma_A$  yli. Näin saadaan

$$\int_{\Gamma_A} p_B \phi_m ds - F_m \int_{\Gamma_A} \phi_m^2 ds - A_m \int_{\Gamma_A} \phi_m^2 ds = 0 \quad (6)$$

kaikilla etenevillä aaltomuodoilla  $\phi_m$ . Tässä on huomioitu, että aaltomuodot ovat keskenään ortogonaalisia eli  $\int_{\Gamma_A} \phi_n \phi_m ds = 0$  kun  $n \neq m$ . Vastaavasti jatkuvuusehto reunalla  $\Gamma_B$  on

$$\int_{\Gamma_B} p_B \psi_m ds - B_m \int_{\Gamma_B} \psi_m^2 ds = 0 \quad (7)$$

kaikilla etenevillä aaltomuodoilla  $\psi_m$ .

Menetelmässä akustinen paine ja kantafunktioesityksien kertoimet ratkaistaan yksi taajuus  $\omega$  kerrallaan. Jos halutaan tarkastella useampaa eri taajuutta, muodostettava yhtälöryhmä on ratkaistava jokaiselle taajuudelle erikseen.

### 3 DISKRETISOINTI ELEMENTTIMENETELMÄLLÄ

Yhtälöiden (5), (6) ja (7) numeerista ratkaisemista varten epäsäännölliseen alueeseen  $B$  muodostetaan elementtiverkko (esim. heksaedri-verkko) ja määritellään verkon vapausasteita vastaavat kantafunktiot  $N_j$ ,  $j = 1, \dots, N_{\text{dof}}$ . Kantafunktiot virittävät avaruuden  $H^1(B)$  diskreetin aliavaruuden  $V$ . Elementtimenetelmässä ratkaisua  $p_B$  haetaan avaruudesta  $V$ , joten se voidaan esittää muodossa

$$p_B = \sum_{j=1}^{N_{\text{dof}}} \mathbf{p}_j N_j, \quad (8)$$

missä vektori  $\mathbf{p}$  sisältää elementtien vapausasteita vastaavat akustisen paineen arvot. Olkoon  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{A}$  ja  $\mathbf{B}$  etenevien aaltomuotojen kertoimet  $F_n$ ,  $A_n$  ja  $B_n$  sisältäviä vektoreita.

Yhtälöä (5) vastaava diskreetti yhtälö voidaan nyt kirjoittaa matriisimuotoon

$$(\mathbf{K} - k_B^2 \mathbf{M}) \mathbf{p} + \mathbf{QA} + \mathbf{RB} = \mathbf{QF}, \quad (9)$$

missä  $\mathbf{K}$  ja  $\mathbf{M}$  ovat elementtimenetelmän jäykkyyks- ja massamatriisit. Paineen jatkuvuusehdot (6) ja (7) ovat matriisimuodoissaan

$$\begin{aligned} \mathbf{Sp} - \mathbf{M}_1 \mathbf{A} &= \mathbf{M}_1 \mathbf{F}, \\ \mathbf{Tp} - \mathbf{M}_2 \mathbf{B} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (10)$$

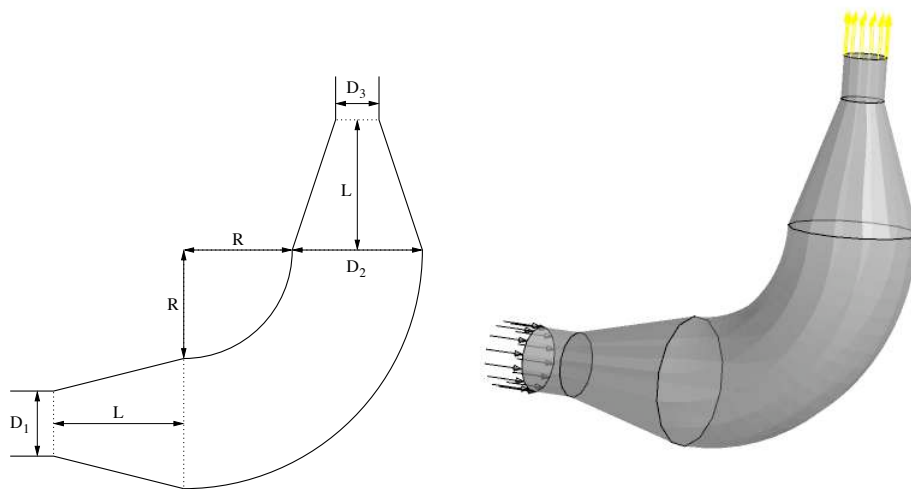
Lineaarisen yhtälöryhmän (9) ja (10) ratkaisuna saadaan putkeen A takaisinheijastuva painevaihtelu (vektori  $\mathbf{A}$ ), putkeen C etenevä painevaihtelu (vektori  $\mathbf{B}$ ) sekä akustinen paine  $p_B$  (vektori  $\mathbf{p}$ ). Kertoimien  $F_n$  ja  $B_n$  avulla saadaan laskettua systeemin aiheuttama akustinen vaimennus tietyllä taajuudella.

### 4 LASKENTAESIMERKKI

Luvuissa 2 ja 3 esitetty formulointi ja diskretisointi on toteutettu Numerola Oy:n Numerrin-mallinnuskielellä, joka on matemaattisten mallien ja simulaattoreiden kehitystyöhön suunniteltu olio-ohjelmointikieli. Kielen syntaksi sisältää matemaattisia käsitteitä ja operaattoreita, joten ohjelmat muistuttavat yhtälöiden matemaattisia formulointeja. Kielen kehitystyössä tavoitteena on ollut nopeuttaa simulaattoreiden toteutusta ja vähentää niiden virhealttiutta.

Menetelmää testattiin kuvan 2 mukaisessa tapauksessa, jossa akustinen paineaalto etenee pyöreässä putkessa, joka levenee, kääntyy 90 astetta ja kapenee alkuperäistä kaapeammaksi. Tarkat mitat ja paineaallon etenemissuunta ilmenevät kuvasta. Äänennopeus putkessa on  $c_B = 340$  m/s eli väliaine on ilmaa. Elementtimenetelmää varten esimerkin geometriaan muodostettiin heksaedri-verkko ANSYS CFX-ohjelmistoilla. Muodostetun verkon tiheys on riittävä taajuusalueen 0-1000 Hz tarkasteluun. Tällä taajuusalueella sekä putkessa A että putkessa C eteneviä aaltomuotoja on ainoastaan yksi (tasoaalto), jota vastaava kerroin  $F_0 = 1$ . Kertoimet  $A_0$  ja  $B_0$  saadaan yhtälöryhmästä (9) ja (10). Systeemin aiheuttama vaimennus desibeleinä on tämän jälkeen laskettu kaavalla

$$TL = 10 \log_{10} |B_0|^2. \quad (11)$$

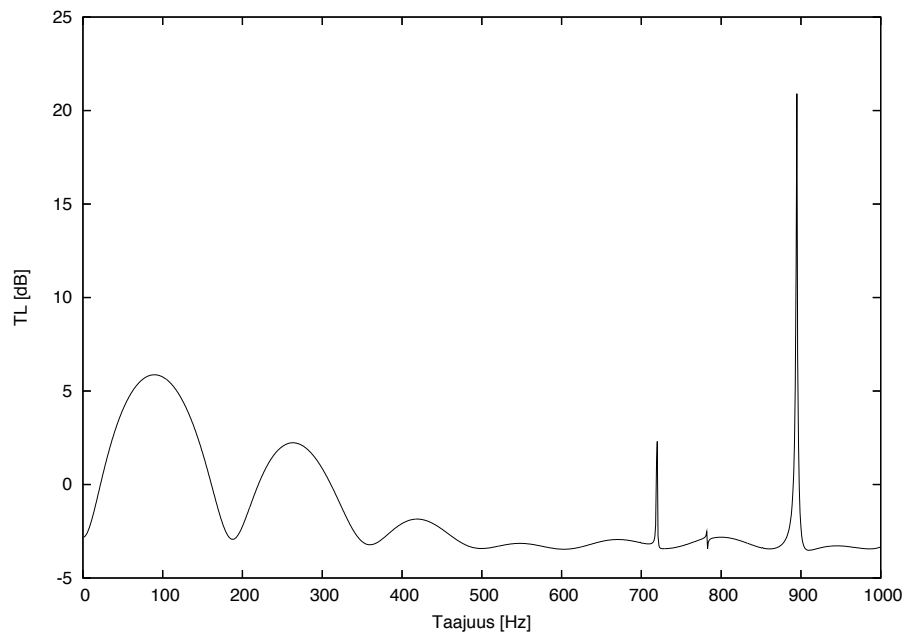


Kuva 2: Laskentaesimerkin putkiston epäsäännöllisen osan poikkileikkaus ja 3D kuva. Mitat ovat  $L = 30$  cm,  $D_1 = 15$  cm,  $D_2 = 30$  cm,  $D_3 = 10$  cm ja  $R = 25$  cm.

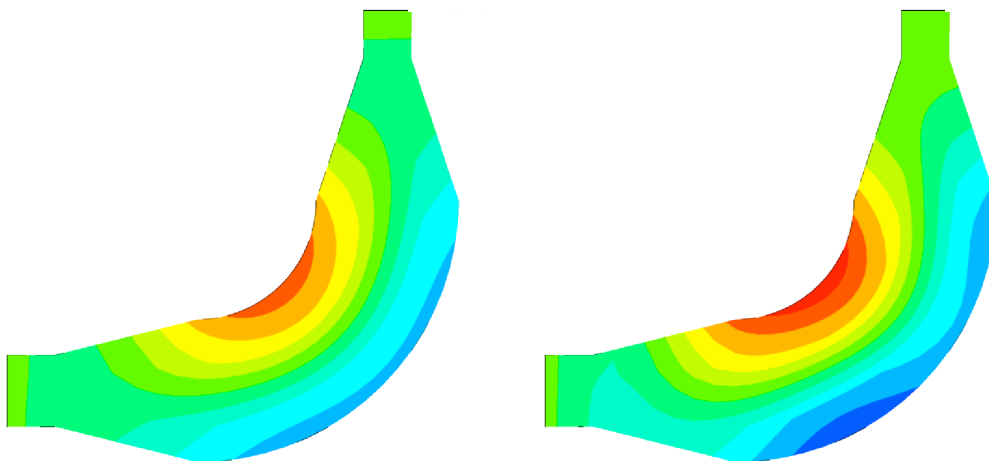
Kuvassa 3 on esitettyä lasketut TL-arvot taajuusalueella 0-1000 Hz. Tuloksista nähdään, että alle 300 Hz:n taajuuksilla putken mutka aiheuttaa vaimennusta kahdella laajalla kaistalla, mutta korkeammilla taajuuksilla vaimennusta tapahtuu yksittäisillä selkeästi erottuvilla taajuuksilla (720 ja 895 Hz). Alueeseen B aiheutuva akustinen paine taajuudella 720 Hz on visualisoitu kuvassa 4 (ratkaisun reaali- ja imaginaariosa). Sen perusteella alueeseen syntyy tällä taajuudella voimakas seisova aalto, eikä painevaihtelu etene juuri lainkaan putkeen C.

## VIITTEET

- [1] KIRBY R, Modeling sound propagation in acoustic waveguides using a hybrid numerical method, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **124**(2008) 4, 1930–1940.
- [2] ASTLEY R J, FE mode-matching schemes for the exterior Helmholtz problem and their relationship to the FE-DtN approach, *Communications on numerical methods in engineering*, **12**(1996) 4, 257–267.
- [3] GABARD G & ASTLEY R J, A computational mode-matching approach for sound propagation in three-dimensional ducts with flow, *Journal of Sound and Vibration*, **315**(2008) 4-5, 1103–1124.



Kuva 3: Esimerkkitapauksessa saavutetut vaimennusarvot.



Kuva 4: Akustisen paineen  $p_B$  reaali- ja imaginaariosa taajuudella 720 Hz.