

HUOKOISEN VÄLIAINEEN OMINAISUUDET - JAKAUMIA JA EPÄVAR- MUUKSIA

Timo Lähivaara¹, Matti Niskanen¹, Teemu Luostari¹ ja Tomi Huttunen^{1,2}

¹ Itä-Suomen yliopisto, Sovelletun fysiikan laitos
Yliopistonranta 1, 70211 Kuopio
etunimi.sukunimi@uef.fi

² Kuava Oy
Haapaniemenkatu 40 E1, 70110 Kuopio

Tiivistelmä

Huokoisilla materiaaleilla on lukuisia sovelluskohteita aina rakennusakustiikasta maaperätutkimuksiin. Näiden materiaalien fysikaalisiin ominaisuuksiin liittyy epävarmuustekijöitä, jotka johtuvat sekä materiaaliominaisuuksien luonnollisesta vaihtelusta näytteen sisällä että näiden ominaisuuksien mittaamiseen liittyvästä epätarkkuudesta. Materiaaliominaisuuksia voidaan mitata esimerkiksi ultraäänen avulla. Ultraäänimittausten analyysissä tulee käyttää huokoiselle väliaineelle johdettuja fysikaalisia malleja.

Tässä työssä aallon eteneminen väliaineessa mallinnetaan käyttäen Biotin aaltoteoriaa huokoisille elastisille materiaaleille. Teoria kuvaa tavallisen ääniaallon lisäksi mekaanisten aaltojen etenemisen huokoisen materiaalin rungossa ja näiden aaltojen yhteisvaikutukset. Tutkimuksessa hyödynnettävien tilastollisten laskentamenetelmien avulla pystytään kartoittamaan materiaaliominaisuuksien jakaumia, ja toisaalta, mallintamaan mittauksiin liittyviä epävarmuuksia.

1 JOHDANTO

Huokoisuudella tarkoitetaan ei-kiinteän aineen (kaasu tai neste) osuutta materiaalin kokonaistilavuudesta. Useissa sovelluksissa tarvitaan tietoa materiaalin huokoisuudesta. Esimerkiksi pohjavesi- ja maarakennetutkimuksissa huokoisuus kertoo kuinka paljon maa- tai kallioperä voi sitoa vettä. Osteoporoosin diagnostiikassa huokoisuuden avulla voidaan määrittellä kuinka lujia ovat ihmisten luut. Rakennustekniikassa ja -akustiikassa huokoisuus on keskeinen suure määrittelemään materiaalin lämmön- ja/tai ääneneneristyskykyä.

Huokosten kytkeytyneisyys vaikuttaa siihen, miten kaasu tai neste kulkeutuu huokoisessa väliaineessa. Fysikaalisesti tätä ominaisuutta mitataan virtausvastuksen ja tortuositeetin avulla. Virtausvastus määrittelee nimensä mukaisesti, miten suuren vastuksen huokoinen materiaali aiheuttaa sen läpi virtaavalle kaasulle tai nesteelle. Tortuositeetti kuvaa väliaineen huokoisten "kanavien" monimutkaisuutta. Huokoinen materiaali voi olla hyvä sitomaan nestettä, mutta vapauttaa sitä hyvin hitaasti (esimerkiksi savi), tai materiaalilta voidaan edellyttää korkeaa huokoisuutta ja pientä virtausvastusta (suodatinmateriaalit).

Materiaalin huokoisten ominaisuuksien mittaaminen on vaativa tehtävä. Usein eri ominaisuudet selvitetään sovelluskohtaisesti eri menetelmin. Esimerkiksi kiviaineen huokoisuus mitataan punnitsemalla vesisaturoitunut kivinäyte ja vertaamalla sen painoa kuivattuun kiviinäytteeseen. Vaimennusmateriaalien virtausvastus voidaan laskea sen läpi virtaavan kaasun kokemasta painehäviöstä. Lääketieteellisissä ultraäänitutkimuksissa luun huokoisuus pyritään määrittämään epäsuorasti ultraäänien vaimenemisesta sen kulkeutuessa luun läpi.

Huokoisen väliaineen kaikki mekaaniset ominaisuudet kytkee yhteen 1950-luvulla kehityksen alkunsa saanut Biotin huokoisen väliaineen teoria [1, 2]. Maurice Anthony Biot kehitti mallin työskennellessään konsulttina öljyteollisuudessa ja sovelsi sitä kallioperän huokoisten ominaisuuksien tutkimukseen öljyn etsintään liittyvissä mittauksissa. Sittemmin mallia on sovellettu laajasti useilla eri tutkimusaloilla [3, 4, 5]. Biotin mallin haasteena on sen laskennallinen monimutkaisuus. Ultraäänien tapauksessa malli tuottaa useita erityyppisiä aaltomuotoja, joiden simulointi on raskasta jopa nykyaikaisille supertietokoneille. Kun Biotin mallin avulla pyritään ratkaisemaan väliaineen materiaali-parametrit, esimerkiksi ultraäänellä tehdyistä mittauksista, tulee ratkaista Biotin yhtälön määrittämä inversio-ongelma (nk. käänteinen Biotin ongelma). Inversio-ongelman ratkaisussa Biotin yhtälö joudutaan ratkaisemaan useita kertoja, mikä edelleen pidentää laskenta-aikaa merkittävästi.

Tässä tutkimuksessa hyödynnetään uusimpia laskennallisia menetelmiä [6, 7] Biotin yhtälön ratkaisemiseen ja kehittynyttä inversiolaskentaa [8] käänteisen Biotin ongelman ratkaisuun. Kyseisillä menetelmillä on mahdollista määrittää kaikki Biotin mallin tarvitsemat materiaalin ominaisuudet yhdestä ultraäänimittauksesta.

2 NUMEERISET ESIMERKIT

Tässä kappaleessa käsitellään kahta esimerkkiä, joissa ensimmäisessä keskitytään kytkettyyn ongelmaan ja toisessa vesitankissa suoritettaviin ultraäänimittauksiin. Ensimmäisessä esimerkissä havainnollistamme, miten huokoisuus ja tortuositeetti vaikuttavat aaltokenttään. Toisessa esimerkissä tavoitteena on estimoida tilastollisen inversion keinoin huokoisen suodatinmateriaalin ominaisuuksia vesitankissa tehdyistä ultraäänimittauksista.

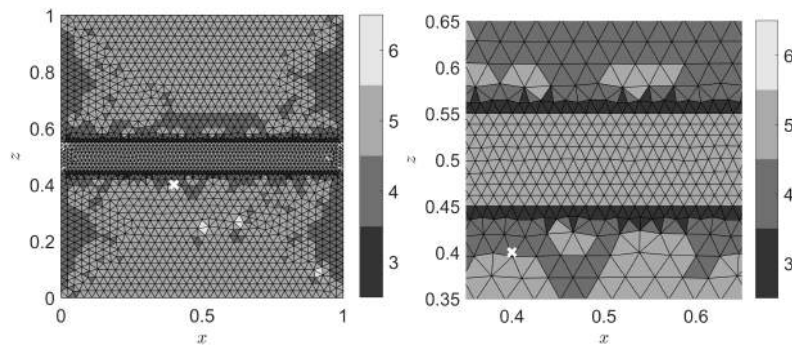
2.1 Kytetty ongelma

Esimerkissä tarkasteltavan ongelman geometria koostuu kolmesta huokoisesta materiaalista. Geometria ja elementtiverkko on esitetty kuvassa 1 ja fysikaaliset materiaali-parametrit taulukossa 1.

Äänilähteenä käytetään Gaussin funktion ensimmäistä aikaderivaattaa (taajuus $f = 40$ kHz). Äänilähde mallinnetaan momenttitensorina, jossa nolasta poikkeavat diagonaali-komponentit oletetaan keskenään yhtä suuriksi. Edellisten lisäksi lähdefunktion maksimi-amplitudiksi asetetaan 1 ja lähde sijoitetaan pisteeseen $(x_s, z_s) = (0.4, 0.4)$. Äänilähteen paikka on havainnollistettu kuvassa 1 valkoisella x-symbolilla.

Taulukko 1: Esimerkissä käytetyt materiaaliparametrit. Tähdellä merkittyjä tortuositeetin ja huokoisuuden arvoja muutetaan simulaatioissa. Käytetyt arvot ilmoitetaan tulosten yhteydessä.

parametri	symboli	$ z - 0.5 > 0.05$	$ z - 0.5 < 0.05$
tiheys (kiinteä)	ρ_s (kg/m ³)	2500	2200
tiheys (neste)	ρ_f (kg/m ³)	1000	950
puristuskerroin (neste)	κ_f (GPa)	2.3	2.0
puristuskerroin (kehys)	κ_{fr} (GPa)	10.0	6.7
puristuskerroin (kiinteä)	κ_s (GPa)	16.0	6.9
leikkausmoduuli (kehys)	μ_{fr} (GPa)	9.6	3.0
tortuositeetti	τ	2	*
huokoisuus	ϕ	0.4	*
viskositeetti	η (Pa·s)	0.001	0.002
permeabiliteetti	k (m ²)	10^{-7}	10^{-6}
vaimennusparametri	Q_0	80	100

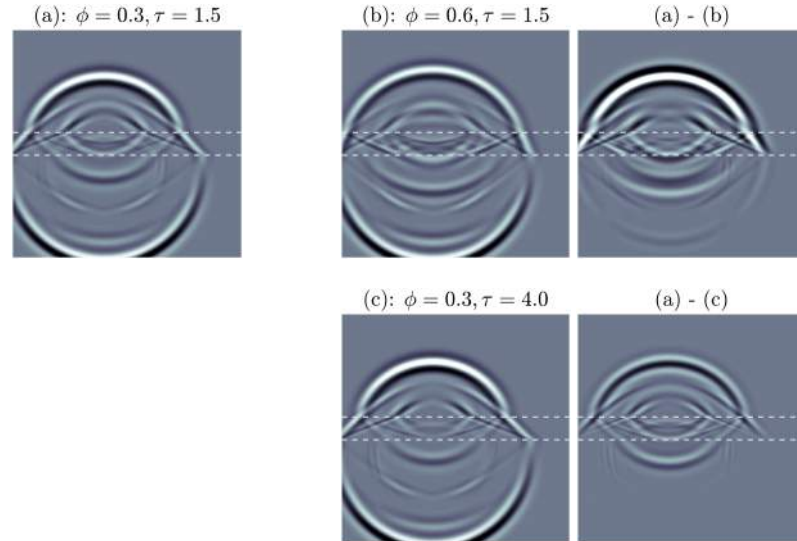


Kuva 1: Laskennassa käytetty elementtiverkko. Lisäksi oikealla tarkempi kuva geometrian keskeltä havainnollistaen verkon tihennystä. Kuvien värisävykartta kertoo laskentamenetelmässä käytetyn polynomikantafunktion asteluvun jokaiselle elementille [9]. Kuvassa valkoinen x-symboli näyttää äänilähteen paikan.

Kuvassa 2 on havainnollistettu huokoisuuden ja tortuositeetin vaikutusta aaltokenttiin. Kuvista voidaan esimerkiksi huomata, että huokoisuuden kasvattaminen kasvattaa aaltojen etenemisnopeutta, kun taas tortuositeetin kasvattaminen hidastaa aallon etenemistä.

2.2 Ultraäänimittaukset vesitankissa

Seuraavaksi tarkastellaan vesitankissa tehdyistä ultraäänimittauksista laskettuja estimaatteja huokoisen materiaalin fysikaalisille parametreille. Esimerkin tavoitteena on havainnollistaa tilastollisen inversion [8] avulla laskettujen piste-estimaattien ja epävarmuusestimaattien hyödynnettävyyttä huokoisen väliaineen fysikaalisten parametrien karakterisoinnissa.



Kuva 2: Huokoisuuden ϕ (yllä) ja tortuositeetin τ (alla) vaikutus aaltokenttiin. Valitut parametrit on esitetty kuvien otsikoissa. Kaikissa kuvissa on sama akselisto ja ajanhetki.

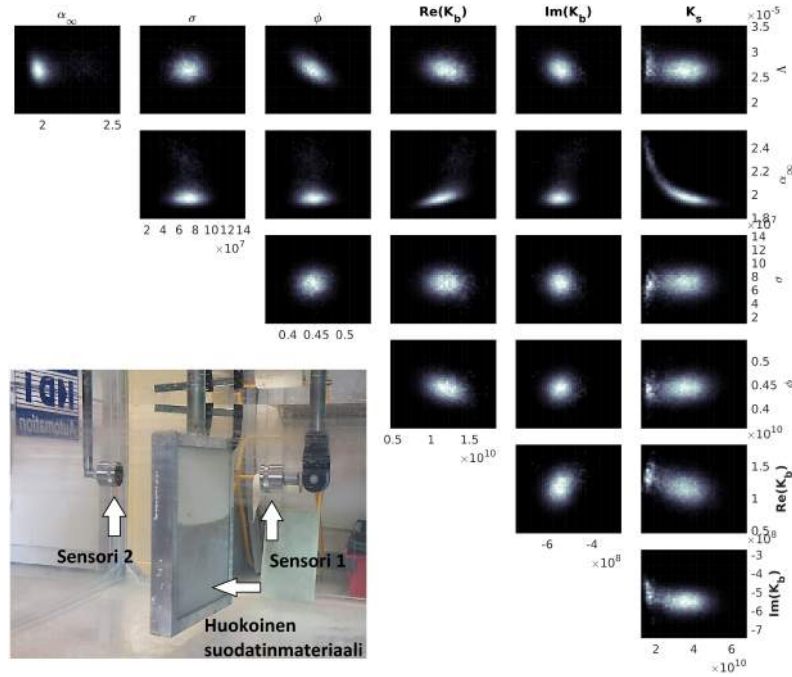
Ongelman havaintomallissa

$$\text{mittausdata} \approx \text{Biotinmalli}(\text{fysikaalisetparametrit}) + \text{kohinamalli}$$

mittausdatana käytetään transmissio- ja heijastuskertoimia. Mittausasetelma ultraäänian-tureineen on nähtävissä kuvassa 3. Käytetty laskentamalli, mittausasetelma ja ongelma-nasettelu on kuvattu yksityiskohtaisemmin viitteissä [10, 6].

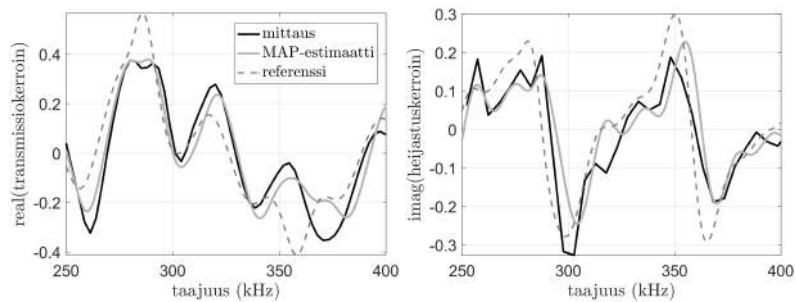
Estimaatteja laskettaessa asetimme huokoista suodatinmateriaalia kuvaavien parametrien odotusarvoiksi valmistajan ilmoittamat arvot. Valmistajan ilmoittamissa arvoissa on kuitenkin, esimerkiksi valmistusteknisistä syistä, vaihtelua. Tilastollisessa inversiossa estimoitavien parametrien vaihtelu voidaan ottaa tehokkaasti huomioon ennakkotietomallilla (*priori*). Esimerkissä oletettiin parametreille 20% keskihajonta odotusarvosta, joiden lisäksi parametrit oletettiin korreloimattomaksi, koska meillä ei ollut tietoa parametrien välisistä korrelaatioista. Kohinamallina käytettiin nollakeskiarvoista valkoista kohinaa (odotusarvo 5% mittausdatan maksimiarvosta).

Kuvassa 3 on esitetty mittaus tuloksista lasketut marginaalijakaumat (todennäköisyys-tiheysfunktio), joista voidaan laskea erilaisia tunnuslukuja (piste-estimaatteja) kuten *maximum a posteriori* (*MAP*) ja ehdollinen odotusarvo. Edellisen lisäksi todennäköisyys-tiheysfunktio kertovat piste-estimaattien luotettavuudesta. Toisaalta jakaumat kertovat myös inversio-ongelman luonteesta eli ovatko jakaumat esimerkiksi monihuippuisia, jolloin gradienttipohjaiset menetelmät voivat tuottaa lokaaleja minimejä globaalin sijaan. Jakaumat paljastavat myös eri parametrien välisiä korrelaatioita. Kuvan jakaumista esi-merkiksi puristuskertoimen K_s ja tortuositeetin α_∞ välillä havaitaan selkeä korrelaatio.



Kuva 3: Näytteistämällä [10] lasketut marginaalijakaumat. Vasemmassa alakulmassa kuva mittausasetelmasta ja tutkittavasta huokoisesta materiaalista.

Kuvassa 4 on esitetty transmissiokertoimen reaaliosa ja heijastuskertoimen imaginaariosa taajuuden funktiona mitatulle datalle, tilastollisen inversion tuottamalle MAP-estimaatille ja valmistajan ilmoittamista arvoista lasketulle referenssille.



Kuva 4: Transmissio- (vasen) ja heijastuskerroin (oikea) taajuuden funktiona mittaukselle, MAP-estimaatille ja valmistajan ilmoittamien parametriarvojen avulla lasketulle referenssiarvolle.

3 YHTEENVETO

Työssä tutkittiin aaltoilmiöitä huokoisessa väliaineessa. Numeerisissa esimerkeissä tarkastelimme kahta esimerkkiä, joista ensimmäisessä esitimme miten eri parametrit (huokoisuus ja tortuositeetti) vaikuttavat havaittaviin aaltokenttiin. Toisessa esimerkissä selvitimme huokoisesta materiaalin parametrien arvoja vesitankissa tehtyjen ultraäänimittausten perusteella. Mittauksista saatiin tietoa vesitankkiin upotetun huokoisesta suodatinmateriaalin ominaisuuksista ja toisaalta tilastollisen inversion avulla tietoa estimaattien luotettavuudesta.

VIITTEET

- [1] M.A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. I. Low frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*, 28(2): 168–178, 1956.
- [2] M.A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. II. Higher frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*, 28(2): 179–191, 1956.
- [3] N. Sebaa, Z.E.A. Fellah, M. Fellah, E. Ogam, A. Wirgin, F.G. Mitri, C. Depollier, and W. Lauriks. Ultrasonic characterization of human cancellous bone using the Biot theory: Inverse problem. *Journal of the Acoustical Society of America*, 120(4): 1816–1824, 2006.
- [4] M. Yvonne Ou. On reconstruction of dynamic permeability and tortuosity from data at distinct frequencies. *Inverse Problems*, 30(9):095002, 2014.
- [5] T. Lähivaara, N.F. Dudley Ward, T. Huttunen, Z. Rawlinson, and J.P. Kaipio. Estimation of aquifer dimensions from passive seismic signals in the presence of material and source uncertainties. *Geophysical Journal International*, 200:1662–1675, 2015.
- [6] G. Gautier, L. Kelders, J. P. Groby, O. Dazel, L. De Ryck, and P. Leclaire. Propagation of acoustic waves in a one-dimensional macroscopically inhomogeneous poroelastic material. *Journal of the Acoustical Society of America*, 130(3):1390–1398, 2011.
- [7] J.S. Hesthaven and T. Warburton. *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications*. Springer, 2007.
- [8] J.P. Kaipio and E. Somersalo. *Statistical and Computational Inverse Problems*. Springer-Verlag, 2005.
- [9] N.F. Dudley Ward, T. Lähivaara, and S. Eveson. A discontinuous Galerkin method for poroelastic wave propagation I: the two-dimensional case. 2017. In review.
- [10] M. Niskanen, A. Duclos, T. Lähivaara, O. Dazel, J-P. Groby, and T. Huttunen. Characterization of a porous plate saturated with water using Bayesian inversion. In *22nd International Congress of Acoustics*, 2016.