

# BIOTIN TEORIA HUOKOISTEN MATERIAALIEN ILMAÄNEN- ERISTÄVYYDEN MALLINNUKSESSA

Petteri Laitinen, Valtteri Hongisto

Työterveyslaitos  
Ilmastointi- ja akustiikkalaboratorio  
Lemminkäisenkatu 14-18 B 20520 Turku  
plaitine@abo.fi, valtteri.hongisto@occuphealth.fi

## 1 JOHDANTO

Rakennusakustiikassa käytetään pääasiassa Zwikkerin ja Kostenin [1] sekä Beranekin [2] teorioihin pohjautuvia ns. ekvivalentti fluidi -malleja huokoisten materiaalien ominaisuuksien mallintamiseksi. Ehkä tunnetuimmat malleista ovat Delanyn ja Bazleyn [3] sekä Allardin ja Champouxin [4] mallit. Alba ja Ramis [5] ovat tehneet hyvän yhteenvedon näistä malleista. Nämä mallit olettavat, että materiaalissa kulkee yksi vaimeneva pitkittäinen ilma-aalto. Ne antavat kuvaaviksi suureiksi materiaalin ominaisimpedanssin ja etenemisvakion. Keskeinen parametri näiden laskennassa on virtausvastus  $r$ . Zwikkerin ja Kostenin fundamentaaleilla kaavoilla näitä malleja voidaan käyttää monikerrosrakenteissa.

Biotin [6,7] vuonna 1956 julkaisema teoria on puolestaan esimerkki mallista, jossa ilmassa kulkevan pitkittäisaallon lisäksi otetaan huomioon rungossa kulkeva pitkittäis- ja poikittaistaalto. Teoria nojautuu lujuusoppiin, mutta itse kaavat ovat perua aaltoyhtälöistä. Biotin teoria käyttää 7 materiaalispesifistä parametria, missä yllämainitut ekvivalentti fluidi -mallit kahta tai kolmea. Biotin teorian kuvaavat suureet ovat läpäisseen ja heijastuneen paineaallon amplitudin suhde saapuvan aallon amplitudiin.

*Taulukko 1. Seitsemän mallia huokoisten aineiden ääneneristävyysominaisuuksille.*

Tekijät	Parametrit	Rajoitus	Kritiikki	Tyyppi	Viite
Allard & Champoux	$l, r,$ $\rho_0, f,$	$\frac{l}{r} \leq 1$	-	E	[4]
Allard & Champoux	$l, r,$ $h, \alpha_\infty, \Lambda, f$	-	Miten määritetään $\Lambda$ ?	S	[4]
Biot	$\rho_0, f, E_1, l$ $h, r, c_0, \nu, \alpha_\infty$	-	Työläs	T	[6,7] [11]
Delany & Bazley	$l, r,$ $\rho_0, c_0, f$	$0.01 \leq \frac{l}{r} \leq 1$	Epäluotettava pienellä taajuudella	E	[3]
Miki	$l, r,$ $\rho_0, c_0, f$	$0.01 \leq \frac{l}{r} \leq 1$	Epäluotettava pienellä taajuudella	E	[12],[13]
Voronina	$\rho_0, h, D, F$ $l, r, N, f, \alpha_\infty$	Elastinen materiaali	Miten mitata $D$ ja $F$ ?	S	[8]
Voronina	$h, \rho_0, l, r,$ $D, f, \mu$	Keraaminen materiaali	Jäykkä runko	S	[9]

Taulukossa 1 on vertailtu 7 yleisintä kirjallisuudessa esiintyvää mallia. Ne on jaettu kolmeen ryhmään, empiirisiin (E), semiempiirisiin (S) ja teoreettisiin (T) malleihin johtamistavan perusteella.  $f$  on taajuus,  $r$  virtausvastus,  $l$  levyn paksuus,  $c_0$  äänen nopeus ilmassa,  $\rho_0$  ilman tiheys,  $h$  huokoisuus,  $\Lambda$  huokosen ominaispituus,  $\alpha_\infty$  rakennetekijä,  $E_1$  kimmomoduuli,  $\nu$  Poissonin suhde,  $D$  huokosen halkaisija,  $\mu = 1.85 \cdot 10^5$  Pa/s dynaaminen viskositeettikerroin,  $F$  paine, jolla materiaali painuu 20 % kasaan ja  $N$  leikkausjännitys.

Työterveyslaitoksen ilmastointi- ja akustiikkalaboratoriossa Turussa alettiin keväällä 2001 tutkia Biotin mallin soveltuvuutta mineraalivillan ääneneristävyuden ennustamiseen. Mallien antamia tuloksia verrattiin kaiuntahuonemenetelmällä diffuusilla tulokulmalla mitattuun ilmaääneneristävyyteen. Tavoitteena oli selvittää Biotin fundamentaalien mallien edut huomattavasti yksinkertaistettuihin ekvivalentti fluidi -malleihin nähden.

## 2 BIOTIN MALLI

Taajuuden  $f$  lisäksi Biotin teorian käyttämät seitsemän materiaalille ominaista parametriä ovat kimmomoduuli  $E_1$ , Poissonin luku  $\nu$ , virtausvastus  $r$ , rakennetekijä  $\alpha_\infty$ , huokoisuus  $h$ , tiheys  $\rho$  ja levyn paksuus  $l$ . Kimmomoduuli ja Poissonin luku sisältävät lisäksi kompleksiosan, ns. häviökertoimen  $\eta$ . Lisäksi Biotin malli käyttää ilman puristuvuutta  $K$ , joka on taajuusriippuva kompleksinen parametri ja riippuu huokosten geometriasta. Nämä yhteensä kymmenen parametriä riittävät Biotin teorian mukaan kuvaamaan äänen etenemistä huokoisessa materiaalissa, jos seuraavat ehdot täyttyvät:

- Materiaali on tilastollisesti katsoen täysin isotrooppinen.
- Runko on täysin elastinen.
- Huokosten suuruus ei ole liian vaihteleva.
- Lämmönjohtumista ei oteta huomioon.

Nämä ehdot ratkaisevat Biotin mukaan, millä materiaaleilla ja taajuusalueilla teoriaa voidaan soveltaa. Tiedettiin, että ensimmäinen ehto ei toteudu mineraalivillalle, sillä mitauksissa poikkivillan kimmomoduuli osoittautui olevan noin 8-kertainen mattovillan arvoon nähden. Helenius [10] on käsitellyt mm. kimmomoduulin, virtausvastuksen ja rakennetekijän mittausta tarkemmin. Ehdot kuitenkin unohdettiin tarkoituksella, ja kokeiltiin, minkälaisia arvoja kyseinen malli antaa mineraalivillan tapauksessa.

Boltonin [11] artikkelin mukaan Biotin mallissa ilman ja huokosen materiaalin rajapinnan tulee toteuttaa 4 reunaehto. Kaksi ehto kuvaa ulkoisen paineaallon jakautumista jännitykseksi huokososaan ja runkoon. Yksi ehto muodostuu yksikkötilavuuden nopeuden jatkuvuudesta rajapinnassa sekä yksi ehto siitä, että leikkausjännitystä ei esiinny huokosen materiaalin pinnalla. Jos seinänä on siis pelkkä mineraalivilla, muodostavat yhteensä 8 reunaehto lineaarisen yhtälöryhmän.

Kahdeksan tuntematonta, jotka saadaan yhtälöryhmän ratkaisuna ovat huokoisessa materiaalissa liikkuvien aaltojen amplitudit sekä heijastuneen ja läpäisseen aallon amplitudit. Jos sisääntulevan paineaallon amplitudi oletetaan olevan 1, läpäisseen aallon amplitudi  $T$  ja heijastuneen aallon amplitudi  $R$ , saadaan ilmaääneneristävyys kaavasta  $\mathbf{R} = 20 \log(1/T)$ . Biotin mallia ja sen implementointia on kuvattu tarkemmin Laitisen työssä [12].

Bolton on kirjoittanut reunaehdot myös kovalle pinnalle, kuten kipsilevyllä tai pellillä, sekä liimatusta että liimamattomassa tapauksessa. Näitä reunaehtoja soveltaen Biotin teoria voitaneen laajentaa sandwich-rakenteisiin. Ratkaistava matriisiyhtälö on tällöin suu-  
rempi, koska reunaehtoja on enemmän.

### 3 MENETELMÄT

#### 3.1 Mallinnus

Biotin malli ohjelmoitiin Matlab-ohjelmistolla. Tulokulma integroitiin numeerisesti aina 69 asteeseen saakka normaalista tulokulmasta. Kaikkien tulokulmien arvioitiin olevan yhtä todennäköisiä. Mallilla pyrittiin ennustamaan R50-mineraalivillan ääneneristävyys taajuusalueella 100...3150 Hz. Ennusteessa käytetyt parametrit ovat taulukossa 2. Taulukoitujen arvojen lisäksi käytettiin materiaalin tiheyttä  $\rho_1 = 85 \text{ kg/m}^3$  ja huokoisuutta  $h = 0.97$ . Taulukossa  $\parallel$  tarkoittaa lomavillaa,  $\perp$  poikkivillaa.

Ennusteet tehtiin vertailun vuoksi myös Delanyn ja Bazleyn [3], Allardin ja Champouxin [4] sekä Mikin [10,11] malleilla. Yhtälöt löytyvät esimerkiksi Alban [5] artikkelista. Ääneneristävyys niille johdettiin ominaisimpedanssin ja etenemisvakion funktiona seuraavasti. Olkoon tulevan paineaallon amplitudi  $p_i = I$ . Tällöin heijastuvan aallon amplitudi on  $IR_{12}$ , ja edenneen aallon amplitudi  $IT_{12}$ , missä  $T_{12}$  ja  $R_{12}$  ovat etenemis- ja heijastuskerroin yhtälöiden

$$T_{ij} = \frac{2Z_j}{Z_i + Z_j}, \quad (1)$$

$$R_{ij} = \frac{Z_j - Z_i}{Z_i + Z_j}, j = 1, 2, i = 1, 2 \quad (2)$$

mukaisesti.  $Z_i$  on aallon tulosuunnan aineen ominaisimpedanssi,  $Z_j$  rajapinnan etene-  
missuunnan aineen ominaisimpedanssi. Kirjoitetaan

$$p(x) = p(0)e^{-\gamma_2 x},$$

missä  $\gamma_2 = \alpha + \beta i$  on etenemisvakio mineraalivillassa. Edennyt aalto kohtaa levyn takapinnan amplitudilla  $IT_{12}e^{-\gamma_2 l}$ . Osa,  $IT_{21}T_{12}e^{-\gamma_2 l}$ , jatkaa eteenpäin, osa,  $IR_{21}T_{12}e^{-\gamma_2 l}$  heijastuu takaisin villaan. Kokonaisläpäisseen paineaallon amplitudi  $T$  voidaan kirjoittaa

$$T = IT_{12} \left( e^{-\gamma_2 l} T_{21} + e^{-\gamma_2 3l} R_{21}^2 T_{21} + e^{-\gamma_2 5l} R_{21}^4 T_{21} + \dots \right) \quad (3)$$

$$= IT_{12} T_{21} e^{-\gamma_2 l} \left( 1 + (R_{21} e^{-\gamma_2 l})^2 + (R_{21} e^{-\gamma_2 l})^4 + \dots \right) \quad (4)$$

$$= IT_{12} T_{21} e^{-\gamma_2 l} \frac{1}{1 - R_{21}^2 e^{-2\gamma_2 l}}. \quad (5)$$

Yhtälöt (1) ja (2) voidaan sijoittaa yhtälöön (5). Tällöin saadaan

$$T(Z_1, Z_2, \gamma_2, l) = \frac{4IZ_1 Z_2 e^{-\gamma_2 l}}{(Z_1 + Z_2)^2 - (Z_1 - Z_2)^2 e^{-2\gamma_2 l}}. \quad (6)$$

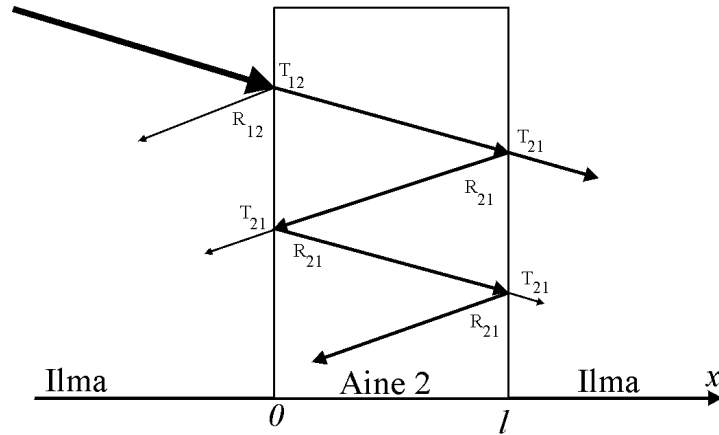
Jos aine 1 on ilmaa, (6) voidaan kirjoittaa

$$T(Z_2, \gamma_2, l) = \frac{4\rho_0 c I Z_2 e^{-\gamma_2 l}}{(\rho_0 c + Z_2)^2 - (\rho_0 c - Z_2)^2 e^{-2\gamma_2 l}}. \quad (7)$$

Yhtälöä (7) voidaan käyttää ilmaääneneristävyyden laskemiseen seuraavasti.

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= 20 \log_{10} \left( \frac{I}{T} \right) \\ &= 20 \log_{10} \left( \frac{(\rho_0 c + Z_2)^2 - (\rho_0 c - Z_2)^2 e^{-2\gamma_2 l}}{4(\rho_0 c Z_2) e^{-\gamma_2 l}} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Etenemisvakio  $\gamma_2$  ja ominaisimpedanssi  $Z_2$  saadaan viitteistä [3], [4] ja [13].



Kuva 1. Kaavakuva rajapinnoissa tapahtuvista heijastuksista.

Taulukko 2. Biotin mallissa käytetyt parametriarvot R50-mineraalivillalle.

	$l$	$\nu$	$E_1$	$r$	$\rho_a$
	125 mm	$0.49(1 + 0.1i)$	$50300(1 + 0.1i)$	66000 Pas/m <sup>2</sup>	0.1164
⊥	80 mm	$0.49(1 + 0.1i)$	$419000(1 + 0.1i)$	35000 Pas/m <sup>2</sup>	0.2845

### 3.2 Ilmaääneneristävyyden mittaus

Biotin mallin antamaa ennustetta verrattiin ISO 140-3:1995 standardin mukaan kaiuntahuonemenetelmällä mitattuun ilmaääneneristävyyteen. Laboratoriomenetelmät on kuvattu viitteessä [15]. Näytteen pinta-ala oli 1 m<sup>2</sup>, poikkivillan paksuus 80 mm ja mattovillan paksuus 125 mm.

## 4 TULOKSET JA POHDINTA

Kuvassa 2 ovat lasketut tulokset mitattuun ääneneristävyyteen verrattuna. Biotin mallin antama ääneneristävyys mineraalivillalle R50 on mitattua suurempi koko taajuusalueella. Poikkivillan tapauksessa malli antoi hyvän ennusteen taajuusalueella 100-3150 Hz, suurin

poikkeama oli 5.6 dB taajuudella 200 Hz. Lomavillalle malli antoi hyväksyttäviä arvoja välillä 100-800 Hz. Tämän yläpuolella mallin antamat ennusteet olivat välttäviä, taajuuksilla 2000-3150 Hz poikkeama oli jopa noin 30 dB.

Erot Delanyn ja Bazleyn, Mikin sekä Allardin ja Champouxin mallien välillä olivat pieniä. Biotin malli toimi pienillä taajuuksilla paremmin kuin muut mallit, korkeilla taajuuksilla ekvivalentti fluidi -mallit toimivat paremmin.

## 6 JOHTOPÄÄTÖKSIÄ

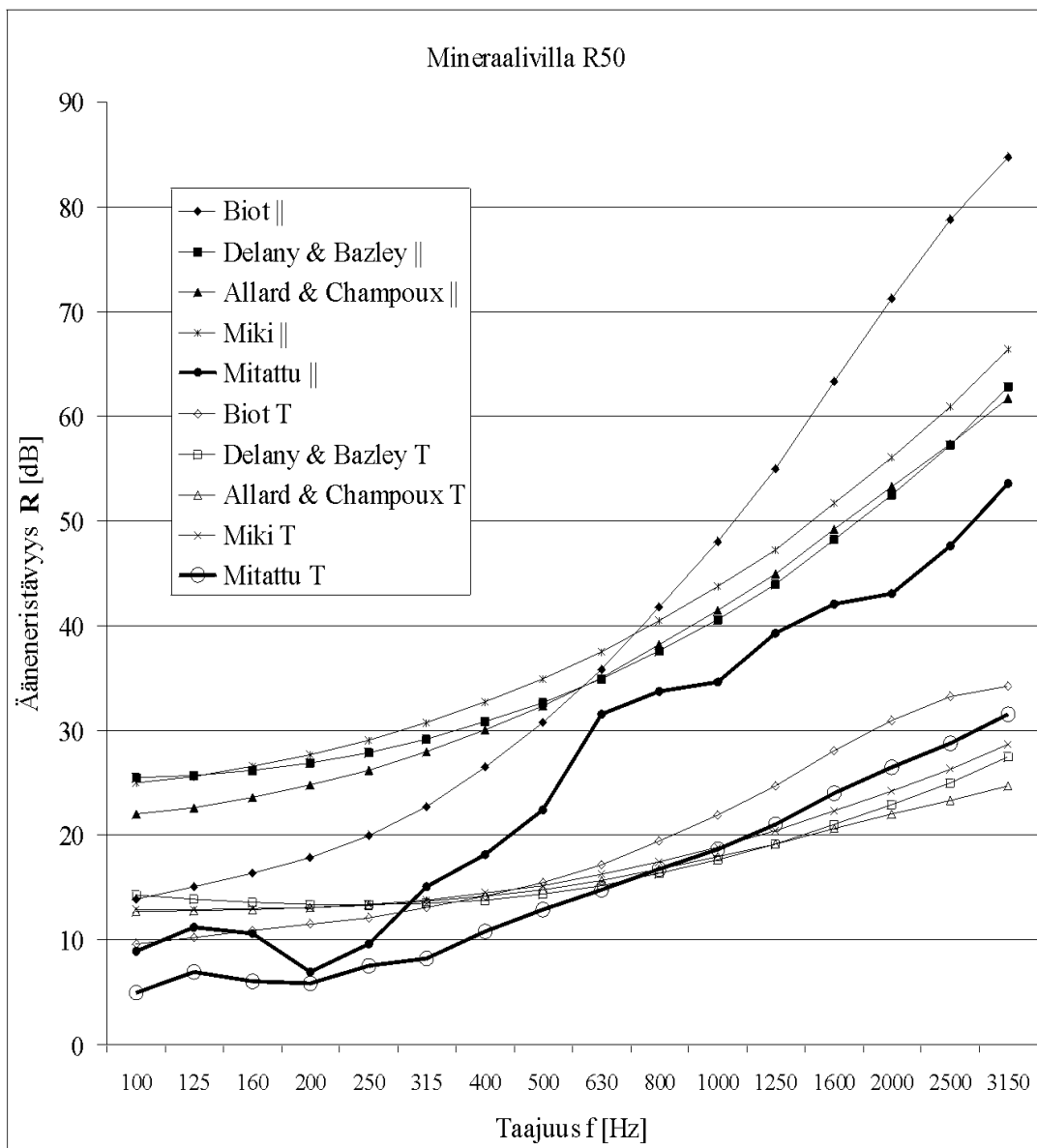
Tutkimuksen vakavana puutteena on, että ohjelmoitua Biotin mallia ei kyetty verifioimaan. Kirjallisuudesta ei löydetty ilmaääneneristävyyden ennustetta pelkälle absorboivalle levyille. Toinen puute on tutkittujen näytteiden pieni määrä. Tulokset validoitiin vain kahdella näytteellä, koska mallin käyttö vaati uusien mittausten menetelmien [10] kehittämistä parametrien määrittämiseksi.

Yhden näytteen perusteella Biotin malli vaikuttaa sopivan mineraalivillan ääneneristävyyden mallintamiseen työläydestään huolimatta. Mallin soveltaminen Boltonin reunaehtojen avulla sandwich-rakenteisiin vaikuttaa järkevältä jatkotyöltä. Lisäksi parametrien määrittäminen ja varsinkin ilman puristuvuuden  $K$  tutkiminen kuitumaisille huokoisille materiaaleille vaikuttaa tarpeelliselta ennusteen parantamiseksi.

## LÄHTEET

1. C. Zwikker, C.W. Kosten: Sound Absorbing Materials (Elsevier Publishing Company 1949)
2. L. L. Beranek: Acoustic Impedance of Porous Materials (J. Acoust. Soc. Am. (1942))
3. M. E. Delany, E. N. Bazley: Acoustical Properties of Fibrous Absorbent Materials (Applied Acoustics (3), 105-116 (1970) Elsevier Publishing Company Ltd, England)
4. J.F. Allard, Y. Champoux: New Empirical Equations for Sound Propagation in Rigid Frame Fibrous Materials (J. Acoust. Soc. Am. **91**(6), June 1992)
5. J. Alba, J. Ramis: An Alternative Method for the Characterisation of Fibrous Materials from Using Techniques Based on the Allard and Champoux Model (Noise & Vibration Worldwide September (2000) 19-25)
6. M. A. Biot: Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range (J. Acoust. Soc. Am. **28**(2), March 1956)
7. M. A. Biot: Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. II. Higher-Frequency Range (J. Acoust. Soc. Am. **28**(2), March 1956)
8. N. Voronina: Comparison between Theoretical and Empirical Models for Elastic and Porous Materials (Applied Acoustics 58(1999) 255-260)
9. N. Voronina: An Empirical Model for Rigid-Frame Porous Materials with Low Porosity (Applied Acoustics 58(1999) 295-304)
10. R. Helenius, M. Lindgren, P. Laitinen, E. Nousiainen, V. Hongisto: Seinärakenteiden ääneneristävyyden mallinnuksessa tarvittavien parametrien mittausten menetelmät (Akustiikkapäivät 2001, 8.-9.10.2001, Espoo)

11. J.S: Bolton, N-M. Shiau, Y.J. Kang: Sound Transmission Through Multi- Panel Structures Lined with Elastic Porous Materials (J. of Sound and Vib. (1996) **191**(3), 317-347)
12. Y. Miki: Acoustical Properties of Porous Materials - Modification of Delany-Bazley Models- (J. Acoust. Soc. Jpn 1990 (E) 11,1,19-24)
13. Y. Miki: Acoustical Properties of Porous Materials - Generalizations of Empirical Models- (J. Acoust. Soc. Jpn 1990 (E) 11,1,25-28)
14. P. Laitinen: Mineralullens ljudreduktionstal (Pro Gradu -tutkielma, Åbo Akademi matematiikan laitos, Turku 2001)
15. V. Hongisto, M. Lindgren, J. Keränen: Enhancing Maximum Measurable Sound Reduction Index Using Sound Intensity Method and Strong Receiving Room Absorption (J. Acoust. Soc. of Am. **109**(1), Jan. 2001)



Kuva 2. Mitattu ja laskettu ääneneristävyyden Biotin, Allardin ja Champouxin, Delany ja Bazleyn, sekä Mikin mallien mukaan. T = poikkivilla, || = lomavilla.