

ÄÄNEN SÄTEILY PUTKIKELLOISTA

Juha Backman¹

¹ Nokia Oyj
Keilalahdentie 2-4
02150 ESPOO
juha.backman@nokia.com

Tiivistelmä

Tässä tarkastellaan putkikellojen äänen säteilymekanismien teoreettista mallia, joka perustuu säteilyn esittämiseen kahdella perusmekanismilla: poikittaisen värähtelyn tuottama ääni ja putken sisällä olevan ilmapatsaan tuottama ääni. Ilmapatsaan tuottaman äänen syntymekanismeissa tarkastellaan erikseen mahdollisia lineaarisia ja epälineaarisia mekaanisia kytketymismekanismeja putken värähtelystä ilman värähtelyyn.

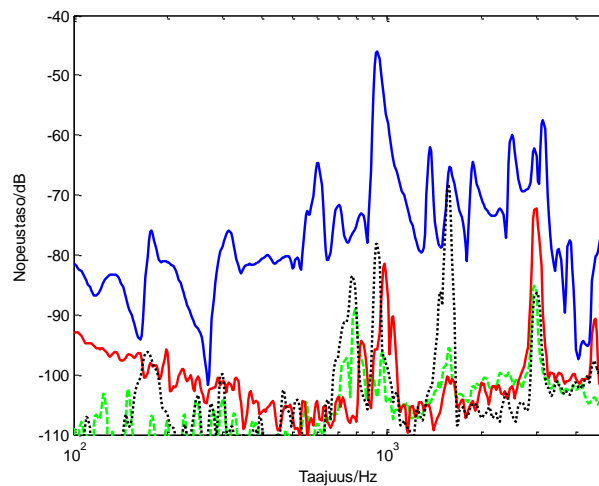
1 JOHDANTO

Putkikellojen akustiikan tarkastelussa mielenkiintoisin kysymys lienee se, mikä on mekaanisen rakenteen, vasaralla lyötävän putken, oleellinen vaikutus sointiin, ja mikä erottaa putkikellon niistä lyömäsoittimista, joissa äänen tuottomekanismi vaikuttaisi samantyyppiseltä, kuten kellopelit, joissa ääni tuotetaan umpinaisella värähtelevällä neliöpalkilla, tai vibrafoni, jossa värähtelevän palkin alla on resonaattori, joka kytkeytyy herätteeseen ainoastaan akustisesti.

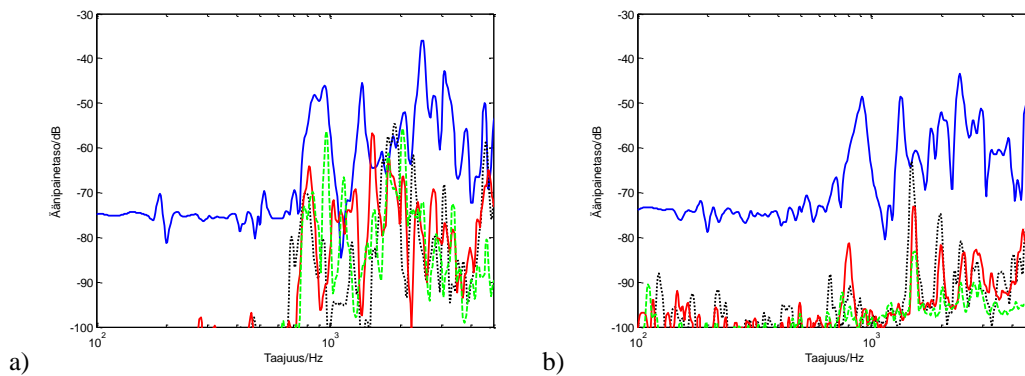
Putkikellojen suunnittelun ensimmäinen ongelma on oikean virityksen löytäminen, ja tähän ongelmaan on tunnetusti muodostettavissa ratkaisu yleisesti käytetyillä teknisen taivutusteorian menetelmillä [1] [2].

2 KOKEELLISIA TULOKSIA

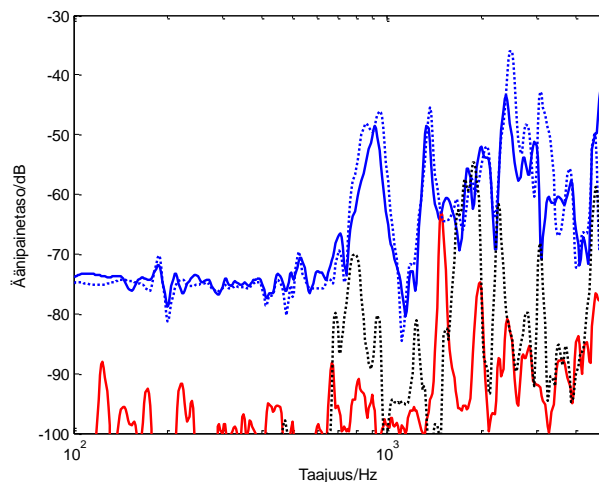
Putkikellojen äänen säteilyä tutkittiin yksinkertaisimmalla mahdollisella ”putkikellolla”, jona käytettiin 1,2 m pitkää alumiiniputkea (halkaisija 25 mm, seinämävahvuus 1 mm), joka ripustettiin siten, että molemmat päät pystyvät värähtelemään vapaasti. Tämä putki saatiin värähtelemään ripustuspuheen lähelle kiinnitetyllä pietsosähköisellä aktuaattorilla, johon johdettiin nopea sinipyyhkäisy (chirp-signaali). Mittauksissa käytettiin ARTA-ohjelmistoa. Aktuaattori tuottaa likimain vakiovoiman noin 2 kHz asti, jonka jälkeen aktuaattorin omat resonanssit alkavat vaikuttaa. Yli 5 kHz taajuuksien esittäminen mittaustuloksissa ei ole mielekäästä, sillä näillä taajuuksilla putken pakkovärähtelyvoiman vaikutuspuheen lähellä vaikuttaa merkittävästi sekä mekaanisiin että akustisiin vasteisiin.



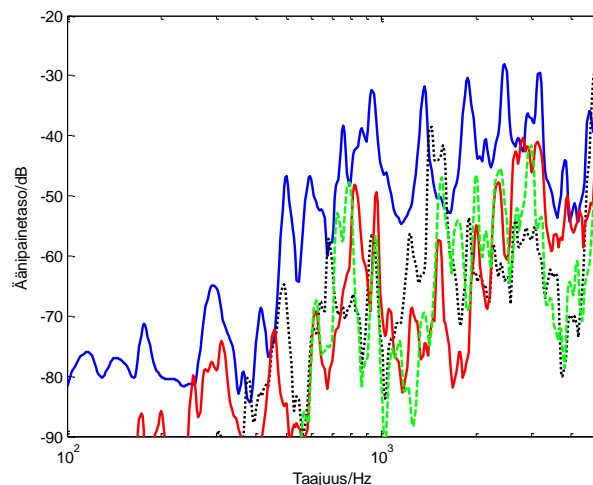
Kuva 1. Mekaaninen nopeus aktuaattorin kiinnityspisteessä. Perustaajuus: ehjä sininen viiva, toinen harmoninen: musta pisteviiva, kolmas harmoninen: punainen ehjä viiva, neljäs harmoninen: vihreä katkoviiva.



Kuva 2. Päistään avoimen (a) ja suljetun (b) putken vapaassa kentässä maksimivärhtelyn suuntaan säteilemän äänen taajuusvaste, harmonisten komponenttien merkinnät samat kuin kuvassa 1. Suljetun putken tapauksessa särön käyttäytyminen vastaa laadullisesti hyvin kuvan 1 mekaanisessa mittauksessa havaittua säröä, joten voidaan olettaa että b)-kohdan mittauksessa merkittävin säteilymekanismi on lineaarinen.



Kuva 3. Putken päiden sulkemisen vaikutus äänen säteilyyn. Sininen pisteviiva: perustaajuus, avoin putki; sininen ehjä viiva: suljettu putki; musta pisteviiva: 2. harmoninen, avoin putki, punainen ehjä viiva: 2. harmoninen, suljettu putki. Putken päiden sulkeminen ei siis vaikuta juurikaan säteilyyn perustaajuudella, mutta merkittävästi harmonisilla.



Kuva 4. Äänen säteily putken avoimen pään lähellä, harmonisten komponenttien merkinnät samat kuin kuvassa 1.

3 ÄÄNEN SÄTEILYMEKANISMIT

Mittaustuloksista voidaan päätellä, että äänen säteilyyn selittämiseen tarvitaan useampia mekanisme. Kuten kuva 3 osoittaa, putken sisällä värähtelevän ilmapatsaan tukkiminen vaikuttaa erittäin vähän säteilyyn putken alimmilla ominaistajuuksilla, joten voidaan turvallisesti päätellä, että näillä taajuuksilla putken ulkopinnan värähtelyliike tuottaa suurimman osan akustisesta energiasta. Suljetun ja avoimen putken erojen vertailu osoittaa, että putken sisäisen ilmapatsaan värähtely vaikuttaa jonkin verran perustaajuuden säteilyyn, mutta erityisesti harmonisten komponenttien taso muuttuu merkittävästi kun ilmapatsaan säteily estetään.

Kuvan 3 mukaiset perustaajuuden tason muutokset voidaan selittää resonanssisironnalla, jossa putken akustisilla ominaistajuuksilla ulkoinen paineheräte synnyttää putken suuhun merkittävän tilavuusnopeuden, jolloin avoin putkenpää toimii erittäin tehokkaana sirottajana. Tähän ilmiöön viittaa myös se, että putken pään lähellä tehdyssä mittauksessa (kuva 4) akustisten resonanssien ominaistajuudet ovat havaittavissa perustaajuudella.

Akustinen resonanssisironta on kuitenkin lineaarinen mekanismi, ja näissä mittauksissa käytetyillä amplitudeilla sekä mekaaninen että akustinen järjestelmä voidaan turvallisesti olettaa lineaarisiksi. Harmoonisissa komponenteissa havaitun eron selittämiseksi on siis selvitettävä akustisten ja mekaanisten osasysteemien kytkeytymismekanismi, joka olisi epälineaarinen kaikilla amplitudeilla. Putken sivuttaispoikkeama, joka on ulkoisen säteilyn kannalta merkittävin suure, kytkeytyy sisäiseen ilmapatsaaseen heikosti, ja vaikka kytkeytymistä esiintyisikin, poikittainen värähtely vaimenisi tehokkaasti edetessään putkessa ja poikittaisten moodien säteily putken avoimista päistä pienillä taajuuksilla olisi hyvin tehotonta. Tämän takia on etsittävä mekanismia, joka kytkee putken muodonmuutoksen ilmapatsaassa etenevään tasoaaltoon. Tällä oletuksella ainoa mahdollinen kytkeytymismekanismi on putkessa oleva jakautunut tilavuusnopeuslähde.

4 PUTKIEN TAIPUMA JA VÄRÄHTELYN KYTKEYTYMINEN

Edellä todetun mahdollisen epälineaarisuusmekanismin tarkastelu on aloitettava putkien taivutuksen yksityiskohtaisemmasta analyysistä. Teknisen taivutusteorian perusteena olevat yksinkertaistukset on johdettu suurelta osin palkkirakenteiden tarkasteluun, mutta ohutseinäisten putkien taivutuksen tarkastelussa ja etenkin akustisen kytkeytymisen analyysissä on otettava huomioon termejä, jotka yleensä palkkien mekaniikassa voidaan jättää huomiotta. Euler-Bernoulli-malli antaa ominaistajuuksille hyvän likimääräisratkaisun [1], mutta se ei selitä putken poikkileikkauksen muodon käyttäytymistä puhtaassa taivutuksessa, kuten ei myöskään yleensä tarkennuksena käytettävä leikkausjännitykset huomioon ottava Timoshenko-Rayleigh-malli, joka toki ennustaa korkeammat ominaistajuudet tarkemmin.

Putken poikkileikkauksen muodon käyttäytymisen ymmärtämisen perustana on Bassetin [3] ja Rayleighin [4] 1800-luvun lopussa esittämä toteamus, jonka mukaan poikkileikkauksen kehän pituuden muutokseen liittyvät energiat olisivat suuria verrattuna muihin muodonmuutosenergioihin. Tätä periaatetta käyttäen Brazier [5] esitti tuloksen, joka sekä kuvaa putken poikkileikkauksen muodon muutosta että antaa taivutusjäykkyydelle fysikaalisesti järkevän käyttäytymisen nolasta poikkeavilla taipumilla. Tämän tarkastelun kannalta käyttökelpoisemmin muotoiltu on Reissnerin [6] esittämä teoria, jossa esitettyjä ajatuksia käyttäen myöhemmin Wade et al. [7] kehittivät mallia edelleen myös suurille taivutuksille. Tässä kuitenkin Reissnerin teoria, joka esittää poikkileikkauksen likimain ellipsinä, on riittävä.

Putken poikkileikkauksen muuttuminen aiheuttaa myös itsessään mekaaniseen värähtelyyn epälineaarisuutta, sillä vielä materiaalin käyttäytymisen ollessa täysin lineaarista geometrian muutos pienentää taivutusjäykkyyttä. Tarkastelemme kuitenkin nyt vain mahdollista mittausten mukaista mekaanis-akustisen kytkeytymisen mahdollista epälineaarisuutta.

Merkitään: putken taivutussäde = R , taipumattoman putken keskisäde = r , seinämäpaksuus = t , kimmokerroin = E , suppeumakerroin = n ja putken pituus = L . Näitä käyttäen kirjoitetaan apusuureet

$$C = Et, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu)}, \quad \Delta = \frac{r^4 C}{L^2 D} \quad (1)$$

Kaarevuutta kuvataan näiden avulla dimensiottomalla parametrilla α :

$$\alpha = \frac{L}{R} \sqrt{\Delta}. \quad (2)$$

Reissnerin tulosten mukaisen taivutetun putken poikkileikkausta kuvaavan ellipsin iso- ja pikkuakseleiden puolikkaiden a ja b α :n suhteen alimman kertaluvun approksimaatio:

$$a = (r-t/2)(1+\alpha^2/16), \quad b = (r-t/2)(1-\alpha^2/16). \quad (3)$$

Näistä saadaan taivutetun putken sisäpinta-alaksi:

$$A_i = \pi ab = \pi(r-t/2)^2(1+\alpha^2/16)(1-\alpha^2/16) = \pi(r-t/2)^2(1-\alpha^4/256) \quad (4)$$

Poikkeama taipumattoman putken pinta-alasta, $\pi(r-t/2)^2\alpha^4/256$, jätettäisiin varmastikin akustiikkaa lukuunottamatta kaikissa muissa teknisissä sovellutuksissa huomiotta silloin kun putken taivutus on niin vähäistä, ettei taipumaa voida edes silmin havaita. Akustiikan kannalta tämä pinta-alan poikkeama on kuitenkin jakautunut tilavuusnopeuslähte, jonka erityinen piirre on se, että se on amplitudista ja taipuman suunnasta riippumatta epälineaarissa yhteydessä taivutuksen amplitudia kuvaaviin suureisiin, eikä sisällä minkäänlaista lineaarista termiä.

Jos poikkeama lausutaan x :n funktiona $y(x)$, voidaan kaarevuus $\kappa = 1/R$ lausua muodossa

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1+y')^{3/2}}. \quad (5)$$

Koska poikkeama on hyvin pieni, voimme käyttää approksimaatiota.

$$1/R = \kappa \approx |d^2 y / dx^2|. \quad (6)$$

Kuten mittaustulokset osoittavat, putken taipumaa voidaan pienillä taajuuksilla ominaistaajuuksien lähellä approksimoida tarkastelemalla moodeja yksittäin. Putken yksittäisen i :n taivutusmodin poikkeamafunktio on

$$y_i(x) = \sin \beta_i \sinh(\beta_i x / L) + \sinh \beta_i \sin(\beta_i x / L). \quad (7)$$

Tässä ominaisarvot β_i ovat yhtälön $\tan \beta_i = \tanh \beta_i$ ratkaisuja, vrt. [1] ja [2]. Sijoittamalla tämä poikkeaman arvo ensin kaarevuuden likiarvolausekkeeseen (6) ja tästä saatu kaarevuussäde lausekkeeseen (2) ja edelleen (4) saadaan likiarvo putken sisäiseen ilmapatsaaseen kytkeytyvälle jakautuneelle tilavuusnopeuslähteelle.

Tämän tilavuusnopeuslähteen kytkeytymistä ilmapatsaan kokonaisvärähtelyyn voidaan mallintaa esim. siirtolinjamallin avulla. Siirtolinjamallin avulla voidaan muodostaa likimääräinen analyttinen teoria olettamalla, että vaikka putken poikkileikkauksen muodonmuutos on riittävä, jotta putki toimisi lähteenä, muodonmuutos on kuitenkin niin

pientä, ettei se aiheuta oleellisia pinta-alaprofiilin muutoksia jotka heijastaisivat putkessa etenevää tasoaaltoa. Tarkastelua voidaan vielä yksinkertaistaa olettamalla, että säteilyimpedanssi putken päissä on hyvin pieni. Vastaavaa teoriaa voidaan helposti soveltaa myös tilanteeseen, jossa putkikellon sointia muokataan upottamalla putken toinen pää vesiastiaan. Tällä on vaikutusta sekä etenkin alimpien moodien säteilytehokkuuteen että mekaaniseen värähtelyyn kytkeytyviin akustisiin ominaisuusmuotoihin, mutta kytkeytymisen periaate säilyy samana.

6 YHTEENVETO

Tämän teorian mukaan putkikellon äänen tuottaa osittain lineaarinen säteily putken ulkopinnasta ja tätä vahvistaa resonanssisironta putken akustisilla ominaistajuuksilla, mutta putkikellon soinnin varsinainen erityispiirre on kaikilla amplitudeilla epälineaarinen kytkeytyminen taivutuksen ja sisäisen ilmapatsaan välillä. Putkikello siis muistuttaa sointisävyyn vaikuttavien mekanismien osalta tietyllä tavoin perinteistä kanteletta [8] [9], jossa viritystappi muodostaa kaikissa tilanteissa neliöllisen, vaikkakin nyt tutkittavaa tapausta yksinkertaisemman, kytkennän kielen jännityksen ja kaikupohjaan vaikuttavan taivutuksen välille.

VIITTEET

- [1] Ranta, Matti A., Putkikellon Suunnittelu, Akustiikkapäivä 2011, Akustinen Seura, 2011
- [2] Fletcher N, Rossing T, The Physics of Musical Instruments, Springer, New York, 1993
- [3] Basset, Extension and Flexure of Cylindrical and Spherical Thin Elastic Shells, Phil. Trans. A., vol. 190, s. 433, 1890, viitattu Brazier [6]
- [4] Rayleigh, Proc. Roy. Soc., vol. 45, s. 105, 1888, viitattu Brazier [6]
- [5] Brazier L. G., On the Flexure of Thin Cylindrical Shells and other “Thin” Sections, Proc. Royal Soc. A, vol. 116, 104–114, 1927
- [6] Reissner E, On finite pure bending of cylindrical tubes, Österr. Ing. Arch, vol. 15, 165–172, 1961., viitattu Wadee et al. [7]
- [7] Wadee, M. Khurram, Wadee, M. Amher, Bassom, Andrew P., Aigner, Andreas A., Longitudinally inhomogeneous deformation patterns in isotropic tubes under pure bending. Proc. Royal Soc. A., 462(8 March 2006), 817–838.
- [8] Karjalainen M, Backman J, Acoustics of Kantele, the Traditional Finnish Harp, Proc. of Int. Congr. of Acoustics, ICA-92, (Beijing), 1992.
- [9] Karjalainen, M., Backman, J., and Pölkki, J., Analysis, Modeling, and Real-Time Sound Synthesis of the Kantele, a Traditional Finnish String Instrument, Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'93), vol. 2, pp. 229-232, Minneapolis, Minnesota, USA, April 27-30, 1993