

MALLINNUSVIRHEIDEN HUOMIOIMINEN AKUSTISESSA TOMOGRAFIASSA

Janne Koponen¹, Tomi Huttunen¹, Tanja Tarvainen^{1,2} ja Jari P. Kaipio^{1,3}

¹ Sovelletun fysiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto
PL 1627, 70211 KUOPIO
janne.koponen@uef.fi

² Department of Computer Science, University College London, Iso-Britannia

³ Department of Mathematics, University of Auckland, Uusi-Seelanti

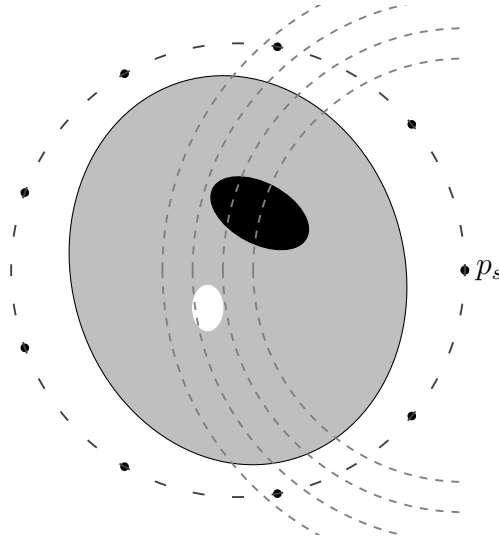
Tiivistelmä

Akustisessa tomografiassa tutkittavan kohteen ominaisuuksia mitataan kappaleen ulkopuolisilla akustisilla havainnoilla. Menetelmän käyttökohteita ovat lääketieteellisten sovellusten lisäksi esimerkiksi tuulen ja lämpötilan mittaaminen ilmakehä tutkimuksessa sekä betonirakenteiden tutkimus. Mittauksessa kohteen läpi lähetetään akustinen pulssi, joka havaitaan kappaleen ympärillä olevilla vastaanottimilla. Näistä havainnoista muodostetaan kaksiulotteinen kuva (rekonstruktio) mitattavista ominaisuuksista kappaleen sisällä. Osana rekonstruktion laskenta-algoritmia käytetään suoraa laskentamallia, akustisessa tomografiassa usein aaltomallia, jonka tarkkuus vaikuttaa rekonstruktion laatuun. Tarkat mallit ovat kuitenkin poikkeuksetta laskennallisesti raskaita ja siten rekonstruktion laskenta-aika voi olla liian pitkä käytännön sovelluksiin. Tässä tutkimuksessa käytetään tilastollista lähestymistapaa, joka huomioi sekä mittauskohinan että mallinnusvirheiden vaikutuksen rekonstruktion laskennassa. Menetelmä mahdollistaa nopeiden, mutta tarkkuudeltaan heikompjen, suorien mallien käyttämisen ilman merkittävää vaikutusta rekonstruktion laatuun. Menetelmän toimivuutta esitellään kahdessa eri testitapauksessa, joissa rekonstruktio lasketaan käyttäen nopeaa, mutta epätarkkaa suoraa mallia. Saatuja tuloksia verrataan tarkalla suoralla mallilla sekä nopealla mallilla ilman mallinnusvirheiden huomioimista laskettuihin rekonstruktioihin.

1 JOHDANTO

Akustisessa tomografiassa tutkittavan kohteen ominaisuuksia mitataan lähettämällä akustinen pulssi kohteen läpi. Mitattavat ominaisuudet, eli rekonstruktio, lasketaan kohteen ulkopuolelta havaitun aaltokentän perusteella. Kaavakuva mittausasetelmasta on esitetty kuvassa 1. Tyypillisesti halutun suureen mittaaminen vaatii useiden eri suunnista tapahtuvien mittausten yhdistämistä ja siten kukin lähetin lähettää vuoronperään signaalin, joka mitataan kaikilla vastaanottimilla. Rekonstruktion laskenta näistä signaaleista on ns. inversio-ongelma.

Osana rekonstruktion laskentaa käytetään suoraa akustista mallia, jonka avulla mallinetaan mittaustapahtumaa. Käytettävän mallin laatu vaikuttaa suoraan saatavan rekonstruktion laatuun ja epätarkalla suoralla mallilla laskettu rekonstruktio on yleensä huonolaatuinen. Mikäli halutaan tarkka rekonstruktio, on käytettävä korkealaatuista suoraa



Kuva 1: Periaatteellinen kuva akustisen tomografian mittausjärjestelystä. Lähetin p_s lähettää akustisen pulssin $f(t)$, joka kulkee mitattavan kappaleen läpi. Akustinen signaali mitataan kappaleen ympärille sijoitetuilla antureilla.

mallia. Tällaiset mallit ovat laskennallisesti raskaita ja siten laskenta-aika voi kasvaa liian pitkäksi käytännön sovelluksiin. Laskennassa käytettävän suoran mallin vaikutusta rekonstruktion laatuun voidaan kuitenkin vähentää käyttämällä esimerkiksi approksimaatiovirhemenetelmää (engl. approximation error method, AEM)[1].

Approksimaatiovirhemenetelmässä suoran mallin virheet ja epävarmuudet huomioidaan tilastollisessa viitekehyksessä. Mallin tilastolliset parametrit lasketaan etukäteen ja niitä hyödynnetään rekonstruktion laskennassa, jolloin virheiden vaikutus tulokseen pienenee. Tällöin laskennassa voidaan käyttää nopeita, mutta tarkkuudeltaan huonompia malleja rekonstruktion laadun heikkenemättä merkittävästi.

Tässä tutkimuksessa sovelletaan approksimaatiovirhemenetelmää akustiseen inversio-ongelmaan ja tutkitaan menetelmän toimivuutta kahden simuloidun testitapauksen avulla.

2 MENETELMÄT

2.1 Suora malli

Pisteessä p_s oleva pistemäinen lähetin lähettää akustisen signaalin $f(t)$. Tällöin aallon etenemistä voidaan mallintaa äärettömässä kaksiulotteisessa alueessa (\mathbb{R}^2 :ssa) akustisella aaltoyhtälöllä

$$-\nabla^2 u(p, t) + \frac{1}{\bar{c}^2(p)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(p, t) = f(t) \delta(p - p_s),$$

alkuehdoilla

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(p, 0) = 0, \forall p \in \mathbb{R}^2 \\ u(p, 0) = 0, \forall p \in \mathbb{R}^2 \end{cases},$$

jossa $p \in \mathbb{R}^2$, δ on Dirac'n deltadistributio ja \bar{c} äänen nopeus. Olkoon jatkossa rekonstruoitava parametri äänen nopeus \bar{c} ja merkitään edellä esitetyn mallin mukaisia simuloituja havaintoja $\bar{A}(\bar{c})$:llä.

Käytännön laskennassa aaltoyhtälö ratkaistaan numeerisesti usein äärellisessä laskenta-alueessa, jonka reunoille asetetaan absorboivat reunaehdot. Reunaehdot voidaan toteuttaa useilla eri tavoilla, esimerkiksi viitteissä [2] ja [3] esitetyillä menetelmillä.

2.2 Approksimaatiovirhemenetelmä

Bayesilaisessa tilastollisessa inversiossa kaikkia tuntemattomia käsitellään satunnaismuuttujina[1]. Kuhunkin satunnaismuuttujaan liittyvää informaation tasoa kuvataan satunnaismuuttujan todennäköisyysjakaumalla. Tällöin inversio-ongelman täydellinen ratkaisu on todennäköisyysjakauma $\pi(\bar{c}|y)$, joka kertoo kunkin ratkaisun \bar{c} todennäköisyyden tehdyille mittaukselle y . Yleinen tapa laskea jakauma on käyttää Bayes'n kaavaa

$$\pi(\bar{c}|y) = \frac{\pi(y|\bar{c})\pi(\bar{c})}{\pi(y)} .$$

Kun oletetaan additiivinen kohina, saadaan havaintomalli

$$y = \bar{A}(\bar{c}) + e . \quad (1)$$

Olettamalla kohina e ja \bar{c} keskenään riippumattomiksi, saadaan[1][4]

$$\pi(\bar{c}|y) = \frac{\pi_e(y - \bar{A}(\bar{c}))\pi(\bar{c})}{\pi(y)} . \quad (2)$$

Kun mittaus y on kiinnitetty, on edellisen yhtälön nimittäjä vakio. Tällöin

$$\pi(\bar{c}|y) \propto \pi_e(y - \bar{A}(\bar{c}))\pi(\bar{c}) ,$$

jossa merkintä \propto tarkoittaa verrannollisuutta.

Merkitään \bar{c}_{MAP} :lla *maximum a posteriori*-estimaattia, todennäköisintä äänennopeusjakaumaa, kun mittaus y on tunnettu. Olettamalla, että $\bar{c} \sim \mathcal{N}(\bar{c}_*, \Gamma_{\bar{c}})$ ja $e \sim \mathcal{N}(0, \Gamma_e)$, siis normaalijakautuneita, saadaan

$$\begin{aligned} \bar{c}_{\text{MAP}} &= \underset{\bar{c}}{\operatorname{argmax}} \pi_e(y - \bar{A}(\bar{c}))\pi(\bar{c}) \\ &= \underset{\bar{c}}{\operatorname{argmin}} (\|L_e(y - \bar{A}(\bar{c}))\|^2 + \|L_{\bar{c}}(\bar{c} - \bar{c}_*)\|^2) , \end{aligned} \quad (3)$$

jossa $L_{\bar{c}}^T L_{\bar{c}} = \Gamma_{\bar{c}}^{-1}$ ja $L_e^T L_e = \Gamma_e^{-1}$.

Edellä on johdettu yleinen tapa laskea rekonstruktio tilastollisessa viitekehyksessä. Menetelmässä inversio-ongelman ratkaisu saadaan minimointitehtävän ratkaisuna. Akustisessa inversiossa tämä minimointiongelma on epälineaarinen ja siten se on käytännössä ratkaistava iteratiivisesti. Ongelman ratkaisussa joudutaan laskemaan tarkka malli $\bar{A}(\bar{c})$ useita kertoja. Mikäli malli on raskas, on rekonstruktion laskeminen hidasta. Toisaalta, kuten aiemmin on todettu, jos malli on epätarkka on saatu tuloskin epätarkka.

Merkitään kevyttä (epätarkkaa) mallia $A(c)$:llä, jossa $c = P\bar{c}$ ja P on projektiio, joka muuttaa tarkan mallin parametrit kevyen mallin parametriksi. Nopeaa mallia $A(c)$ ei voi valita mielivaltaisesti, vaan AEM vaatii toimiakseen, että $A(c) \approx \bar{A}(\bar{c})$ riittävällä tarkkuudella.

Muokataan havaintomallia (1)

$$\begin{aligned} y &= \bar{A}(\bar{c}) + e \\ &= A(c) + \underbrace{\bar{A}(\bar{c}) - A(c)}_{:=\varepsilon} + e . \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{:=\nu} \end{aligned}$$

Tässä ε on mallinnusvirhe. Kun oletetaan, että mallinnusvirhe ε on normaalijakautunut, niin tällöin myös $\nu \sim \mathcal{N}(\nu_*, \Gamma_\nu)$. Kun lisäksi oletetaan, että $c \sim \mathcal{N}(c_*, \Gamma_c)$ ja ν ovat keskenään riippumattomia, saadaan vastaavasti kuin aiemmin

$$c_{\text{MAP}} = \underset{c}{\operatorname{argmin}} (\|L_\nu(y - A(c) - \nu_*)\|^2 + \|L_c(c - c_*)\|^2), \quad (4)$$

jossa $L_\nu^T L_\nu = \Gamma_\nu^{-1}$ ja $L_c^T L_c = \Gamma_c^{-1}$. Tämä kaava näyttää hyvin samankaltaiselta kuin kaava (3). Näissä on kuitenkin yksi oleellinen ero: kaava (3) käyttää tarkkaa mallia $\bar{A}(\bar{x})$, kun taas kaavassa (4) käytetään kevyttä suoraa mallia $A(x)$.

Edellä esiintyviä parametreja Γ_ν ja ν_* on hankala laskea analyttisesti, joten tässä tutkimuksessa niitä estimoidaan näytteisiin perustuen:

1. Generoi \bar{x}^ℓ , $\ell = 1 \dots C$ ja $x^\ell = P\bar{x}^\ell$.
2. Laske $\varepsilon^\ell = \bar{A}(\bar{x}^\ell) - A(x^\ell)$ kaikille $\ell = 1 \dots C$.
3. Laske

$$\varepsilon_* = \frac{1}{C} \sum_{\ell=1}^C \varepsilon^\ell \quad \text{ja} \quad \Gamma_\varepsilon = \frac{1}{C-1} \sum_{\ell=1}^C (\varepsilon^\ell - \varepsilon_*)(\varepsilon^\ell - \varepsilon_*)^T .$$

4. Aseta $\nu_* = \varepsilon_*$ ja $\Gamma_\nu = \Gamma_\varepsilon + \Gamma_e$, koska oletusten mukaan $e \sim \mathcal{N}(0, \Gamma_e)$.

Tämä laskenta ei ole riippuvainen mittauksesta, joten vaihe voidaan suorittaa etukäteen ja tulokset talletetaan myöhemmin käytettäväksi. Saatuja tuloksia voidaan hyödyntää niin kauan kuin mittausolosuhteet eivät muutu oleellisesti. Näin ollen laskenta-aika ei ole tässä vaiheessa kriittinen tekijä.

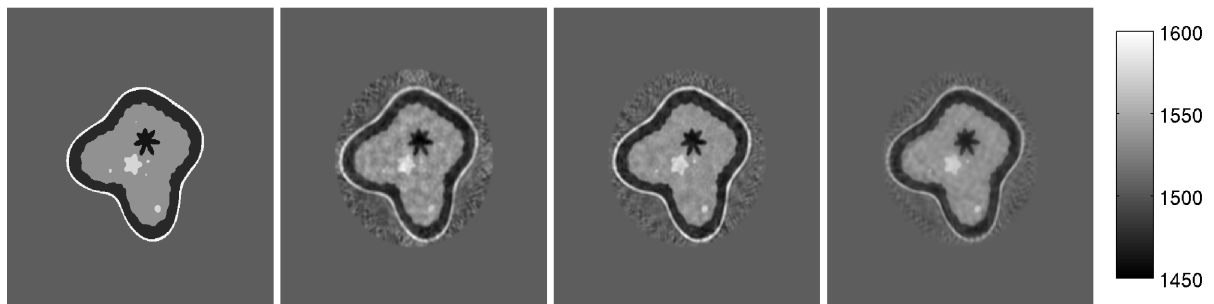
3 SIMULOINNIT JA TULOKSET

Tässä työssä tutkitaan AEM:n toimintaa kahdessa tilanteessa. Suorien mallien ratkaisuun on käytetty äärellisten differenssien menetelmää aikatasossa ja mallien parametrit on esitetty taulukossa 1. Ensimmäisessä tapauksessa nopeassa mallissa käytetään kärkeä aika- ja paikkadiskretointia. Toisessa tapauksessa edellisen lisäksi käytetään laskennallisesti kevyitä, mutta epätarkkoja absorboivia reunaehtoja.

Taulukko 1: Mallien parametrit, laskenta-ajat ja rekonstruktion virheet. Sarakkeet vasemmalta oikealle ovat mallin nimi, aika-askelten lukumäärä K , diskreetointipisteiden lukumäärä N yhdessä spatiaalisessa dimensiossa, diskreetointipisteiden lukumäärä aallonpituudella N/λ ($f = 150$ kHz), laskenta-alueen sivun pituus L , laskenta-aika ja rekonstruktion L^2 -virhe. Simuloitu havainto y on laskettu alimmalla rivillä esitetyillä parametreilla.

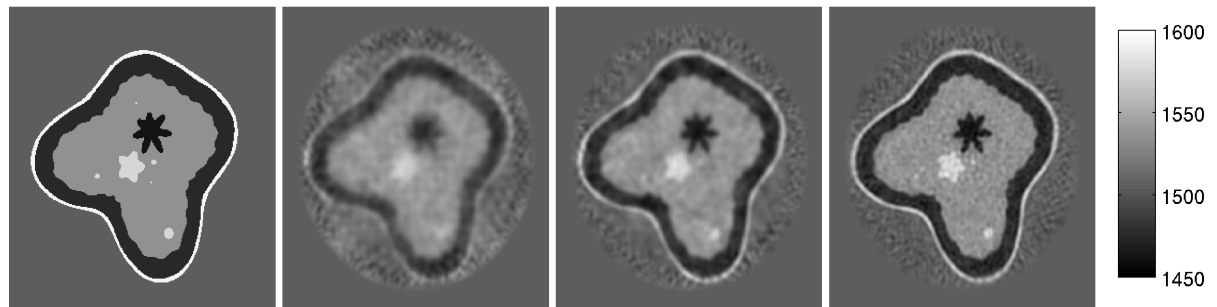
malli	K	N	N/λ	L	laskenta-aika	L^2 -virhe
tarkka	4096	1794	50.7	0.33 m	25 h 2 min 9 s	640
nopea (tapaus 1)	1024	466	13.2	0.33 m	56 min 13 s	951
AEM (tapaus 1)	1024	466	13.2	0.33 m	1 h 4 min 5 s	676
nopea (tapaus 2)	1024	306	13.0	0.22 m	36 min 45 s	1355
AEM (tapaus 2)	1024	306	13.0	0.22 m	41 min 52 s	847
havainto	4096	1858	52.5	0.33 m		

Karkea spatiaalinen ja temporaalinen diskreetointi aiheuttavat virhettä suoran mallin laskennassa. Toisaalta hieno diskreetointi antaa tarkemman laskentatuloksen, mutta kasvattaa laskenta-aikaa. Näin ollen akustisessa inversiossa joudutaan tasapainottelemaan diskreetoinnin tiheyden ja laskentaan käytettävän ajan välillä. Ensimmäisessä testitapauksessa tutkitaan AEM:n toimintaa käytettäessä karkeaa diskreetointia. Testitapauksen rekonstruktiot on esitetty kuvassa 2 ja L^2 -virheet sekä laskenta-ajat löytyvät taulukosta 1. Kuten rekonstruktio kuvista ja L^2 -virheistä havaitaan, AEM pienentää karkeasta diskreetoinnista johtuvaa virhettä merkittävästi. Toisaalta havaitaan, että rekonstruktion laskentaan kuluva aika ei ole AEM:ää käyttävässä menetelmässä merkittävästi suurempi kuin nopealla suoralla mallilla ilman AEM:ää.



Kuva 2: Äänennopeusjakauman rekonstruktio ensimmäisessä testitapauksessa. Numeerinen malli on vasemmanpuoleisessa kuvassa. Tämän oikealla puolella olevat rekonstruktiot vasemmalta oikealle ovat nopealla mallilla laskettu, nopealla mallilla AEM:n kanssa laskettu sekä tarkalla mallilla laskettu.

Korkealaatuiset reunaehdot voivat olla laskennallisesti raskaita ja heikkolaatuiset reunaehdot aiheuttavat virhettä inversio-ongelman numeeriseen ratkaisuun. Toisessa testitapauksessa tutkitaan AEM:n toimintaa tapauksessa, jossa virheitä aiheuttaa karkean diskreetoinnin lisäksi myös heikkolaatuiset, laskennallisesti kevyet, absorboivat reunaehdot. Tapauksen rekonstruktiot on esitetty kuvassa 3 ja L^2 -virheet sekä laskenta-ajat tapauksissa ovat taulukossa 1. Tuloksista nähdään, että AEM kompensoi myös tässä tapauksessa epätarkasta mallista johtuvia virheitä merkittävästi.



Kuva 3: Äänennopeusjakauman rekonstruktio toisessa testitapauksessa. Numeerinen malli on vasemmanpuoleisessa kuvassa. Tämän oikealla puolella olevat rekonstruktioit vasemmalta oikealle ovat nopealla mallilla laskettu, nopealla mallilla AEM:n kanssa laskettu sekä tarkalla mallilla laskettu.

4 JOHTOPÄÄTÖKSET

Tässä työssä tutkittiin mallinnusvirheiden kompensointia tilastollisessa viitekehyksessä AEM:n avulla. Menetelmää tutkittiin kahdella simuloidulla testitapauksella. Ensimmäisessä testitapauksessa tutkittiin karkean diskretoinnin aiheuttamien mallinnusvirheiden kompensointia ja toisessa tapauksessa menetelmän toimintaa heikkolaatuisten reunaehto-
jen ja karkean diskretoinnin aiheuttamien mallinnusvirheiden kompensoinnissa. Simuloinnit osoittivat menetelmän parantavan rekonstruktioiden laatua molemmissa tapauksissa ilman huomattavaa laskenta-ajan lisäystä.

KIITOKSET

Tätä tutkimusta ovat rahoittaneet Suomen Akatemia (projektit 136220, 140984 ja 250215 Inversio-ongelmien huippuyksikkö) sekä Itä-Suomen yliopisto (strateginen rahoitus).

VIITTEET

- [1] KAIPIO J & SOMERSALO E, *Statistical and computational inverse problems*, volume 160, Springer Science+ Business Media, Inc., 2005.
- [2] LIU Q & TAO J, The perfectly matched layer for acoustic waves in absorptive media, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **102**(1997), 2072.
- [3] SEMBLAT J, LENTI L, & GANDOMZADEH A, A simple multi-directional absorbing layer method to simulate elastic wave propagation in unbounded domains, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **85**(2011) 12, 1543–1563.
- [4] CALVETTI D & SOMERSALO E, *Introduction to Bayesian scientific computing: ten lectures on subjective computing*, volume 2, Springer, 2007.